

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Physique

Électromagnétisme

PC-PSI

Cours

Méthodes

Exercices résolus

P. KREMPF

Nouveau programme

Bréal
L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Copyrighted material

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Électromagnétisme

PC-PSI

P. KREMPF

Professeur en classes préparatoires à CPE Lyon

This one
OZJH-LJE-YW7W

1, rue de Rome - 93561 Rosny-sous-Bois cedex

Bréal éditions

Copyrighted material

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Mathématiques 2e année

- Analyse / PC
- Algèbre et géométrie / PC
- Analyse / PSI
- Algèbre et géométrie / PSI

Physique 2e année

- Mécanique / MP-PC
- Mécanique des fluides / PC-PSI
- Électromagnétisme / PC-PSI
- Physique des ondes / PC-PSI
- Électrotechnique / PSI
- Électronique / PSI
- Optique / MP-PC-PSI-PT
- Thermodynamique / PC-PSI

Chimie 2e année

- Chimie organique / PC
- Thermodynamique - Matériaux / PC
- Chimie / PSI

Exercices 2e année

- Mathématiques / PC-PSI
- Physique / PC
- Physique / PSI

Maquette : Sophie Martinet
Couverture : Sophie Martinet
Édition : Pierre Hugel
Mise en pages et illustrations : Suka 22

© Bréal 2004
Toute reproduction même partielle interdite.
Dépôt légal : septembre 2004.
ISBN 2 7495 0396 5

Copyrighted material

Avant-propos

Les Nouveaux Précis Bréal sont conçus pour apporter aux étudiants des classes préparatoires une aide efficace dans leur travail. Tout en conservant la rigueur des éditions précédentes, nous nous sommes efforcés d'aplanir au mieux toutes les difficultés inhérentes au discours scientifique. Nous savons par expérience que le rythme de la prépa n'autorise aucune perte de temps, et nous pensons qu'une explication claire et précise permet d'éviter au lecteur tout « blocage » inutile.

Strictement conforme au nouveau programme, cet ouvrage s'adresse à tous les étudiants de deuxième année des filières PC et PSI. Chaque chapitre est divisé en trois parties complémentaires.

- Le **Cours**, qui présente les principaux raisonnements à comprendre et à connaître, accompagnés de nombreuses applications directes afin d'assimiler immédiatement les notions traitées.

- Les pages **Méthodes**, qui contiennent deux rubriques indispensables à la progression personnelle : *L'essentiel* permet de mémoriser rapidement tout ce qu'il faut retenir du chapitre, et la *Mise en œuvre* expose les grandes méthodes afin d'acquérir les bons « réflexes » en situation.

- Les **Exercices**, classés par niveaux de difficulté, dont les solutions détaillées sont enrichies d'astuces et de conseils (précédés des logos ☼ ou ⚠). Certains exercices sont accompagnés de courtes indications, comme en colle : il suffit parfois d'un petit « déclic » pour démarrer ! En outre, le chapitre 5 contient trois problèmes de concours traités exhaustivement.

Il nous est apparu nécessaire d'accorder aux **Méthodes** et aux **Exercices** une place équivalente à celle du **Cours**. En effet, l'apprentissage ne peut pas être efficace sans combiner étroitement ces trois dimensions : comprendre, savoir faire et s'entraîner. En revanche, s'il organise intelligemment son travail, l'étudiant pourra s'améliorer dans toutes les disciplines en gérant au mieux son temps et ses efforts, principale condition de la réussite.

Ainsi, les étudiants de PC et PSI disposeront, en électromagnétisme, d'un outil de travail complet, adapté au rythme soutenu de cette deuxième année de préparation aux concours.

Nous espérons que ce Nouveau Précis les aidera à passer leurs épreuves avec réussite et nous répondrons volontiers à toute suggestion, remarque ou critique par e-mail à l'adresse **infos@editions-breal.fr**.

L'éditeur et les auteurs

Copyright Bréal

Copyrighted material

Sommaire

Chapitre 1 ■ Éléments d'analyse vectorielle et rappels mathématiques 7

Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre 22
Exercices : énoncés, solutions 26

Chapitre 2 ■ Les équations locales de l'électromagnétisme 33

Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre 63
Exercices : énoncés, solutions 71

Chapitre 3 ■ Induction électromagnétique dans un circuit fixe 107

Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre 120
Exercices : énoncés, solutions 125

Chapitre 4 ■ Induction électromagnétique dans un circuit mobile 147

Méthodes : l'essentiel ; mise en œuvre 154
Exercices : énoncés, solutions 158

Chapitre 5 ■ Quelques problèmes 183

Problème 1 : champ électromagnétique dans un condensateur plan cylindrique 184
Solution 187

Problème 2 : chute d'un aimant dans un tuyau métallique 193
Solution 195

Problème 3 : moteur linéaire 198
Solution 200

Index 204

Copyright

Copyrighted material

CHAPITRE

1

Éléments d'analyse vectorielle et rappels mathématiques

Introduction

La démarche du physicien n'est pas qu'empirique. Il crée des modèles mathématiques qui permettent de « mettre en équations » les événements.

Le but de ce chapitre est de mettre à disposition de l'étudiant les outils mathématiques dont il aura besoin en seconde année dans l'étude des phénomènes physiques du programme.

L'approche physique est privilégiée par rapport à la technique de calcul, le but étant d'appréhender correctement l'interprétation physique des équations ou résultats de calculs auxquels aboutit l'outil mathématique.

Plan du chapitre 1

A. Systèmes de coordonnées et intégrales 8

B. Flux d'un champ de vecteurs 9

C. Opérateur gradient 11

D. Opérateur divergence 13

E. Opérateur rotationnel 15

F. Opérateur laplacien 18

G. Opérateur Nabla 19

Méthodes

L'essentiel ; mise en œuvre. 22

Énoncés des exercices 26

Solutions des exercices 27

Copyrighted material

A. Systèmes de coordonnées

On rappelle les trois systèmes qui ont déjà été rencontrés en première année dans le cours d'électromagnétisme, entre autres.

A.1. Coordonnées cartésiennes

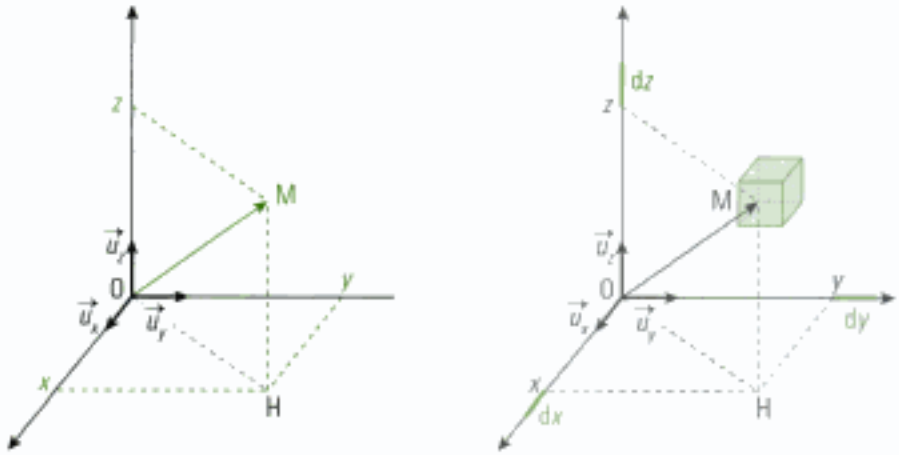


Fig. 1 - Le système de coordonnées cartésiennes.

Dans le repère orthonormé direct $(O ; \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$, un point M de l'espace est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z). Le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u_x} + y\vec{u_y} + z\vec{u_z}.$$

Lorsque les coordonnées x, y ou z de M subissent une variation élémentaire dx, dy ou dz, le point M se déplace respectivement de $dx\,\vec{u_x}$, $dy\,\vec{u_y}$ ou $dz\,\vec{u_z}$. Ainsi, le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes dx, dy et dz :

$$dV = dx \times dy \times dz.$$

A.2. Coordonnées cylindriques

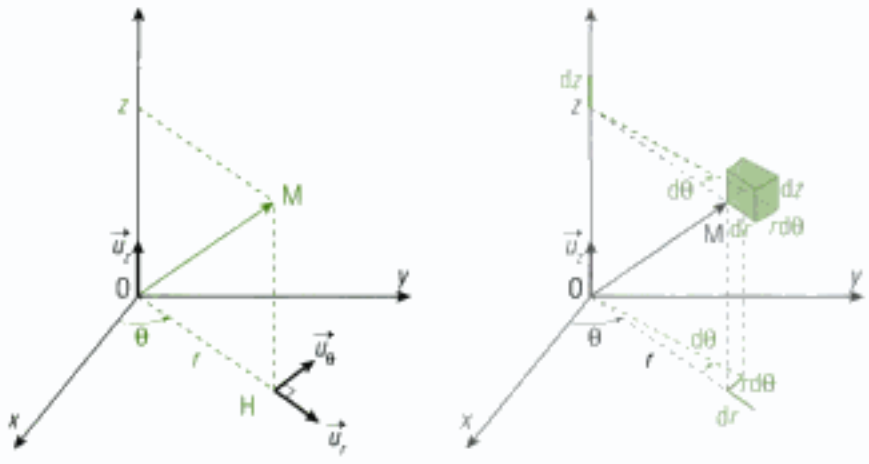


Fig. 2 - Le système de coordonnées cylindriques.

On peut aussi repérer tout point M de l'espace par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) (fig. 2) :

– r représente la distance du point M à l'axe Oz ($r > 0$) ;

– θ définit la position du point M autour de Oz (θ angle compris entre 0 et 2π) ;

– z représente la cote du point M.

Copyrighted material

On définit la base[1] orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ en posant $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$ (H projection orthogonale du point M sur le plan xOy). Dans le repère orthonormé, le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z.$$

Lorsque les coordonnées r, θ ou z de M subissent une variation élémentaire dr, $d\theta$ ou dz, le point M se déplace respectivement de $dr\,\vec{u}_r$, $r d\theta\,\vec{u}_\theta$ ou $dz\,\vec{u}_z$. Ainsi, le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes dr, $r d\theta$ et dz :

$$dV = dr \times r d\theta \times dz.$$

A.3. Coordonnées sphériques

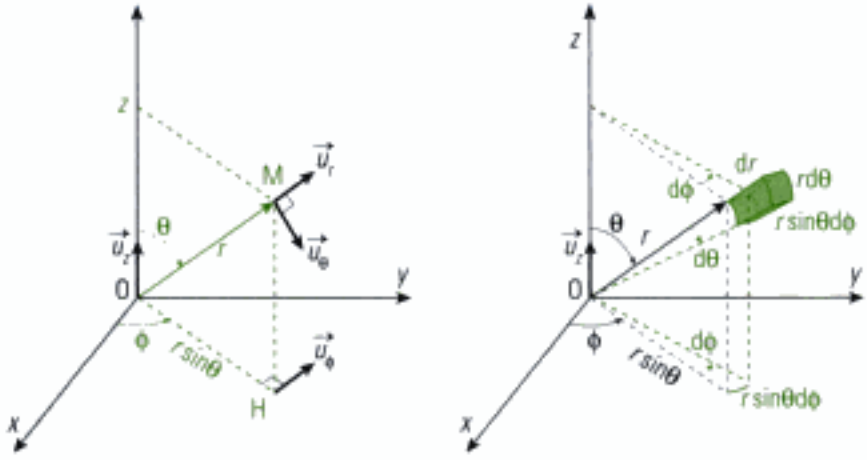


Fig. 3 - Le système de coordonnées sphériques.

Enfin, on peut aussi repérer tout point M de l'espace par ses coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) (fig. 3) :

– r représente la distance du point M au point O ($r = OM > 0$) ;

– θ et ϕ[2] définissent la direction dans laquelle, depuis le point O, on voit le point M (θ angle compris entre 0 et π, ϕ angle compris entre 0 et 2π).

On définit la base[3] orthonormée directe $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$ en posant $\vec{u}_r = \dfrac{\overrightarrow{OH}}{OH}$.

Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\phi)$, le vecteur position du point M s'écrit alors :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r.$$

Lorsque les coordonnées r, θ ou ϕ de M subissent une variation élémentaire dr, $d\theta$ ou $d\phi$, le point M se déplace respectivement de $dr\,\vec{u}_r$, $r d\theta\,\vec{u}_\theta$ ou $r\sin\theta d\phi\,\vec{u}_\phi$. Ainsi, le volume élémentaire dV est un petit parallélépipède rectangle d'arêtes dr, $r d\theta$ et $r\sin\theta d\phi$:

$$dV = dr \times r d\theta \times r\sin\theta d\phi.$$

A.4. Intégrales multiples

Lorsqu'on intègre sur une surface ou un volume, il est nécessaire de faire varier plusieurs coordonnées. Le calcul d'une telle intégrale, dans le cas général, est compliqué. Cependant, si la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées et que les bornes d'intégration de chaque coordonnée sont indépendantes des autres coordonnées, alors l'intégrale multiple est égale au produit des intégrales simples[4] :

1. Cette base est une base locale, car les directions des vecteurs $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ dépendent de la position du point M.

2. L'angle θ n'est pas le même que celui des coordonnées cylindriques, car, en coordonnées sphériques, c'est l'angle ϕ qui donne la position de M autour de Oz.

3. Cette base est une base locale, car les directions des vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_\phi$ dépendent de la position du point M.

4. Cette propriété est une application du théorème de Fubini.

Copyrighted material

$$\iiint f(x)g(y)h(z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \int_{y_0}^{y_1} g(y)\,dy \int_{z_0}^{z_1} h(z)\,dz.$$

Cette propriété est en général toujours vérifiée, ce qui permet de se ramener dans tous les cas étudiés aux calculs d'intégrales simples.

Application 1 **Calcul d'un volume**

Calculer, en utilisant une intégrale, le volume d'un cylindre de hauteur h et de rayon R.

Solution

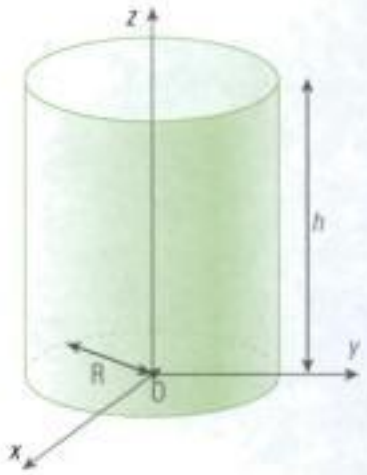
Le système de coordonnées le mieux adapté à cette géométrie est le système de coordonnées cylindriques (r, θ, z). On choisit l'axe de révolution du cylindre comme axe Oz, son origine O étant placée au centre de l'une des bases du cylindre. Un élément de volume dV s'écrit :

$$dV = dr \times r\,d\theta \times dz.$$

Le volume V est la somme de tous les éléments de volume dV :

$$V = \iiint dV = \iiint dr \times r\,d\theta \times dz,$$

avec r variant entre 0 et R, θ variant entre 0 et 2π, z variant entre 0 et h. Comme la fonction à intégrer est un produit de fonctions de chacune des coordonnées, on a :



$$V = \int_0^R r\,dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^h dz = \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R \times \left[\theta\right]_0^{2\pi} \times \left[z\right]_0^h = \frac{R^2}{2} \times 2\pi \times h = \pi R^2 h.$$

1. Un champ est une grandeur physique qui est définie en tout point d'un volume de l'espace (ou, plus rarement, d'une surface). La grandeur concernée dépend donc des coordonnées du point que l'on considère, mais peut aussi dépendre du temps. Un champ stationnaire est indépendant du temps. Un champ uniforme ne dépend pas du point où on le considère (indépendant des coordonnées).

B. Flux d'un champ[1] de vecteurs

Soit $\vec{W}$ un champ de vecteurs et S une surface. Le flux Φ du champ $\vec{W}$ à travers la surface S s'écrit :

$$\Phi = \iint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{W} \cdot \vec{n}\,dS,$$

où $d\vec{S}$ est « le vecteur surface élémentaire » de l'élément de surface dS centré sur un point P de S. Le vecteur $\vec{n}$ est le vecteur unitaire normal à l'élément de surface au point P. Son orientation dépend de la nature de la surface.

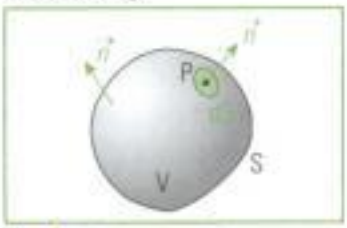


Fig. 4 - Surface fermée.



Fig. 5 - Surface ouverte.

B.1. Cas d'une surface « fermée »

Si la surface S est fermée (fig.4), alors elle délimite un volume V et la normale à la surface est toujours orientée sortant de S (convention). Afin de montrer que S est fermée, on note alors :

$$\Phi = \oiint_S \vec{W} \cdot \vec{n}\,dS.$$

B.2. Cas d'une surface « ouverte »

Si la surface S est ouverte, alors elle s'appuie nécessairement sur une ligne fermée (un contour) Γ (fig.5). On choisit un sens « + » à un parcours le long de Γ (on l'oriente). Le sens de $\vec{n}$ est alors déterminé à partir de cette orientation par « la règle du tire-bouchon ».

Copyrighted material

C. Opérateur gradient

C.1. Définition

Le gradient est un vecteur obtenu à partir d'un champ de scalaires[1]. Dans un système de coordonnées donné, chaque composante du gradient correspond à une dérivation par rapport à la coordonnée d'espace correspondante.

1. Le champ est une grandeur scalaire, c'est à dire un nombre (par opposition à un champ de vecteurs). Par exemple, la température, la pression, la masse volumique, sont des champs scalaires. On supposera ces champs définis, continus et à dérivées continues dans tout le domaine d'étude, ce qui est presque systématiquement le cas en physique.

Définition 1

Le gradient du champ de scalaires f est défini tel que, pour tout déplacement élémentaire $\overrightarrow{dl}$, on ait :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f \cdot \overrightarrow{dl} = df$$

où df est la différentielle totale de f.

Le gradient admet donc les expressions suivantes dans les divers systèmes de coordonnées :

– En coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z.$$

– En coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z.$$

– En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

$$\overrightarrow{\text{grad}}f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\vec{u}_\phi.$$

Le gradient étant un opérateur de dérivation vectorielle par rapport à une coordonnée d'espace, il est homogène à l'inverse d'une distance et son unité SI est le m^{-1}. L'unité SI de $\overrightarrow{\text{grad}}f$ est ainsi celle de f divisée par des mètres.

C.2. Signification physique

Dans l'espace, pour un champ de scalaires non uniforme, le lieu des points où le champ garde une même valeur est une surface[2]. Le gradient est perpendiculaire à ces surfaces « iso ... (nom du champ) »[3] et il est orienté dans le sens des valeurs croissantes du champ. Un fort gradient signifie de fortes variations des valeurs du champ sur de courtes distances.

2. Ceci est vrai car le champ est continu.

3. Les isothermes sont les surfaces où la température est la même en chaque point, les isobares sont celles de même pression, etc...

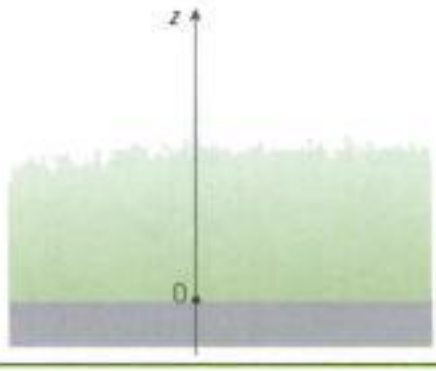
Application 2 **Les isothermes à la surface du sol**

En été, les routes sont chauffées par le Soleil, et on peut grossièrement modéliser le champ de la température de l'air au dessus de la route (demi-espace d'équation $z > 0$) par la loi :

$$T(x, y, z) = T_0 + T_1 e^{-\frac{z}{h}},$$

où $T_0 = 300K$, $T_1 = 30$ K et $h = 3$ m.

Calculer le gradient de température au niveau du sol et à des altitudes de 1 mètre, 3 mètres et 15 mètres.



Copyrighted material

Solution

La loi de température est donnée en coordonnées cartésiennes et le gradient du champ s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,T = \frac{\partial T}{\partial x}\,\vec{u}_x + \frac{\partial T}{\partial y}\,\vec{u}_y + \frac{\partial T}{\partial z}\,\vec{u}_z = -\frac{T_1}{h}\,e^{-\frac{z}{h}}\,\vec{u}_z.$$

Il est dirigé dans le sens opposé de l'axe Oz et sa valeur est :

$$\left\|\overrightarrow{\text{grad}}\,T\right\|(z=0) = 10\ \text{K·m}^{-1}\ ;\quad \left\|\overrightarrow{\text{grad}}\,T\right\|(z=1) = 7{,}1\ \text{K·m}^{-1}\ ;$$

$$\left\|\overrightarrow{\text{grad}}\,T\right\|(z=3) = 3{,}7\ \text{K·m}^{-1}\ ;\quad \left\|\overrightarrow{\text{grad}}\,T\right\|(z=15) = 0{,}07\ \text{K·m}^{-1}.$$

On remarque que la valeur du gradient est d'autant plus élevée que la variation de la température est brutale.

C.3. Circulation d'un gradient

La circulation[1] C du gradient d'un champ de scalaires f entre deux points A et B s'écrit :

$$C = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{dl} = \int_A^B df = f(B) - f(A)^{[2]}.$$

1. On rappelle que la circulation d'un champ $\vec{W}$ le long d'un chemin Γ s'écrit : $C = \int_\Gamma \vec{W}\cdot d\vec{l}$.
2. Par définition du gradient.

Propriété 1

La circulation du gradient d'une fonction f entre deux points A et B vaut :

$$C = \int_A^B \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{dl} = f(B) - f(A).$$

Elle ne dépend pas du chemin suivi entre A et B, mais seulement de la valeur du champ de scalaires f aux deux points A et B.

Application 3 **Composantes du gradient en cylindriques**

Utiliser le résultat précédent pour retrouver simplement les composantes de l'opérateur gradient dans le système de coordonnées cylindriques.

Solution

On sait que la circulation élémentaire du gradient est une différentielle totale :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{dl} = df = \frac{\partial f}{\partial r}\,dr + \frac{\partial f}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\,dz.$$

En coordonnées cylindriques, les trois coordonnées sont r, θ et z. Un déplacement élémentaire s'écrit :

$$\vec{dl} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{u}_z.$$

Ainsi, on peut écrire, en posant $\overrightarrow{\text{grad}} f\big)_{coord}$ la composante de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ suivant $\vec{u}_{coord}$:

$$\overrightarrow{\text{grad}} f \cdot \vec{dl} = \overrightarrow{\text{grad}} f\big)_r\,dr + \overrightarrow{\text{grad}} f\big)_\theta\,r\,d\theta + \overrightarrow{\text{grad}} f\big)_z\,dz,$$

expression que l'on identifie avec la première pour trouver les composantes de l'opérateur gradient dans la base cylindrique :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f\big)_r = \frac{\partial f}{\partial r}\,,\ \overrightarrow{\text{grad}} f\big)_z = \frac{\partial f}{\partial z}\,,$$

$$\overrightarrow{\text{grad}} f\big)_\theta\,r\,d\theta = \frac{\partial f}{\partial \theta}\,d\theta,\ \text{soit}\ \overrightarrow{\text{grad}} f\big)_\theta = \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\,.$$

Copyrighted material

C.4. Champs à circulation conservative

Définition 2

Un champ de vecteurs $\vec{W}$ est dit « **à circulation conservative** » lorsque sa circulation entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement des deux points de départ et d'arrivée.

On peut montrer[1] que ce champ de vecteurs n'est autre que le gradient d'un champ de scalaires f : $\vec{W} = -\overrightarrow{\text{grad}} f$[2]. Il en découle le résultat suivant :

Propriété 2

Lorsqu'un champ de vecteurs $\vec{W}$ est « **à circulation conservative** », il existe une fonction scalaire f dont ce champ est le gradient :

$$\vec{W} = -\overrightarrow{\text{grad}} f \text{[3]}.$$

1. La démonstration est hors programme et on en admet ici le résultat.

2. En physique, le signe négatif est purement conventionnel.

3. Par exemple, le champ électrostatique étudié en première année est à circulation conservative et le champ de scalaires associé est le potentiel électrostatique.

D. Opérateur divergence

D.1. Définition

La divergence est un scalaire obtenu à partir d'un champ de vecteurs. Chaque terme correspond à une dérivation de l'une des composantes du vecteur par rapport à la coordonnée d'espace correspondante.

L'expression de la divergence d'un champ de vecteurs $\vec{a}$ dans les divers systèmes de coordonnées est :

– En coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

– En coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial a_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial a_z}{\partial z}.$$

– En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

$$\text{div}(\vec{a}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (a_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\phi}{\partial \phi}.$$

La divergence étant un opérateur de dérivation vectorielle par rapport à une coordonnée d'espace, son unité SI est le m^{-1}.

D.2. Signification physique

Pour mieux comprendre, on prend l'exemple le plus simple des coordonnées cartésiennes. Dans l'espace, la divergence du champ de vecteurs $\vec{W}$ non uniforme reste nulle si la norme de $\vec{W}$ ne varie pas lorsque l'on se déplace sur une ligne de champ[4]. Réciproquement, si la norme de $\vec{W}$ varie sur une ligne de champ, alors la divergence du champ de vecteurs $\vec{W}$ est non nulle[5]. La norme peut alors croître jusqu'à diverger, et on comprend mieux le concept de « divergence non nulle ».

Physiquement, si la divergence d'un champ de vecteurs est non nulle en un point[6], alors il existe une source du champ en ce point[7].

4. On rappelle qu'une ligne de champ est telle qu'en chacun de ses points, le vecteur lui est tangent.

5. Dans les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique, certains champs ont une norme variable sur leurs lignes de champ et gardent une divergence nulle. Il faut aussi considérer la seconde partie de cette interprétation.

6. Sa norme varie donc en ce point.

7. On verra que les sources du champ électrique sont les charges électriques. La divergence non nulle du champ électrique en un point est alors due à la présence en ce point d'une densité (volumique) non nulle de charges électriques.

Copyrighted material

Application 4 **Calcul de divergence**

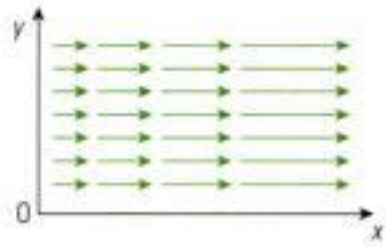
Soient les champs de vecteurs $\vec{W} = x\,\vec{u_x}$ et $\vec{W'} = y\,\vec{u_x}$. Calculer leur divergence et représenter ces champs dans le plan xOy. Interpréter.

Solution

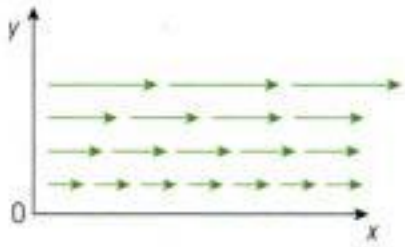
Le calcul en coordonnées cartésiennes donne directement :

$$\operatorname{div}\vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1 \neq 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{div}\vec{W'} = \frac{\partial W'_x}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Le tracé de ces champs dans le plan xOy donne les schémas suivants :



Champ $\vec{W} = x\,\vec{u_x}$



Champ $\vec{W'} = y\,\vec{u_x}$

– Le champ de vecteurs $\vec{W} = x\,\vec{u_x}$ admet une divergence non nulle en tout point. On remarque que le long d'une ligne de champ, la norme du vecteur augmente pour diverger à l'infini.

– En revanche, le champ de vecteurs $\vec{W'} = y\,\vec{u_x}$ admet une divergence nulle en tout point. Bien que les lignes de champ partent à l'infini, la norme du vecteur ne diverge pas (reste constante) lorsque l'on se déplace sur chacune d'elles.

D.3. Formule d'Ostrogradsky[1]

1. On dit aussi « formule de Green-Ostrogradsky ».

Propriété 3

Le flux d'un champ $\vec{W}$ de vecteurs à travers une surface fermée S est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume V délimité par cette surface (fig.6) :

$$\oiint_S \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \operatorname{div}\vec{W}\,dV.$$



Fig. 6 - Surface fermée.

Cette formule est très utile en électromagnétisme, et nous verrons qu'elle permet la démonstration du théorème de Gauss[2].

2. Voir chapitre 2, § D.2.

C'est aussi à partir de cette formule que l'on peut définir l'opérateur divergence, ou retrouver son expression. Montrons-le pour les coordonnées cartésiennes.

Si le volume considéré se réduit à un simple élément de volume dV (fig.7), alors la sommation de l'intégrale sur le volume n'a plus lieu d'exister :

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{W}\,dV = \operatorname{div}\vec{W}\,dV,$$

et l'intégrale $\oiint_S \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS$ devient la somme de six termes, chacun correspondant à une face du parallélépipède dV.

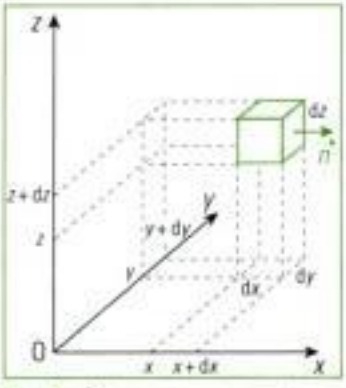


Fig. 7 - Élément de volume dV.

Appelons $\vec{n}$ la normale sortante à la surface. Par exemple, à l'abscisse $x + dx$, on a $dS = dy\cdot dz$ et $\vec{n} = +\,\vec{u_x}$.

Copyrighted material

L'intégrale du flux vaut alors :

$$\oiint_{6\text{faces}} \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS = [W_x(x+dx) - W_x(x)]dydz + [W_y(y+dy) - W_y(y)]dxdz + [W_z(z+dz) - W_z(z)]dxdy.$$

$$\oiint_{6\text{faces}} \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS = \left[\frac{\partial W_x}{\partial x}dx\right]dydz + \left[\frac{\partial W_y}{\partial y}dy\right]dxdz + \left[\frac{\partial W_z}{\partial z}dz\right]dxdy.$$

$$\oiint_{6\text{faces}} \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS = \left[\frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}\right]dV.$$

Or la formule d'Ostrogradsky donne :

$$\oiint_{6\text{faces}} \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS = \text{div}\,\vec{W}\,dV,$$

et il vient donc :

$$\text{div}\,\vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z}.$$

1. Dans les autres systèmes de coordonnées, le raisonnement est le même en considérant le parallélépipède rectangle dont les arêtes correspondent à la variation élémentaire de chacune des coordonnées.

D.4. Champs à flux conservatif

Définition 3

Un champ de vecteurs $\vec{W}$ est dit « **à flux conservatif** » lorsque son flux ϕ à travers toute surface fermée S est nul :

pour toute surface S fermée, $\oiint_S \vec{W}\cdot d\vec{S} = 0$.

En appliquant la formule d'Ostrogradsky, il vient :

$$\oiint_S \vec{W}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div}\,\vec{W}\,dV = 0, \text{ pour tout volume V.}$$

On peut donc en déduire, comme le volume V est quelconque :

Propriété 4

Un champ de vecteurs est « **à flux conservatif** » si et seulement si :

en tout point de l'espace[2], $\text{div}\,\vec{W} = 0$.

2. En effet, la formule d'Ostrogradsky est aussi valable pour un volume V élémentaire (infiniment petit) n'entourant « qu'un seul point ».

D'autre part, si l'on partage la surface fermée S en deux surfaces S_1 et S_2 ouvertes qui s'appuient sur le même contour Γ orienté (fig.8)[3], la conservation du flux ϕ du champ de vecteurs s'écrit alors :

$$\phi = \oiint_S \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS = \iint_{S_1} \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_2} \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS = 0,$$

soit : $-\iint_{S_1} \vec{W}\cdot\vec{n_1}\,dS + \iint_{S_2} \vec{W}\cdot\vec{n_2}\,dS = \phi_2 - \phi_1 = 0$, donc $\phi_2 = \phi_1$.

3. Voir le § B, dans lequel les conventions d'orientation sont précisées.

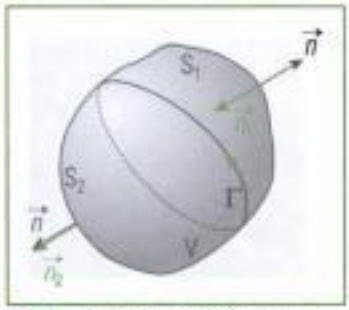


Fig. 8 - Surface S_1 et S_2. Ici, on a : $\vec{n} = -\vec{n_1}$ et $\vec{n} = \vec{n_2}$.

Un champ de vecteurs est « à flux conservatif » si, pour toute surface ouverte S, son flux à travers la surface S ne dépend pas de celle-ci, mais seulement du contour sur lequel elle s'appuie.

E. Opérateur rotationnel

E.1. Définition

Le rotationnel est un vecteur obtenu à partir d'un champ de vecteurs. Chaque composante du rotationnel correspond à des dérivations par rapport aux deux autres coordonnées d'espace.

Copyrighted material

L'expression du rotationnel d'un champ $\vec{a}$ de vecteurs dans les divers systèmes de coordonnées est :

– En coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z.$$

– En coordonnées cylindriques (r, θ, z) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial a_z}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{\partial a_r}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_z.$$

En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{a}) = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (a_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial a_\theta}{\partial \phi}\right)\vec{u}_r + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (r a_\phi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (r a_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial a_r}{\partial \theta}\right)\vec{u}_\phi.$$

Le rotationnel étant un opérateur de dérivation vectorielle par rapport à une coordonnée d'espace, son unité SI est le m^{-1}.

E.2. Signification physique

Pour mieux comprendre, on prend l'exemple le plus simple des coordonnées cartésiennes. Dans l'espace, si le champ de vecteurs est uniforme, son rotationnel reste nul. C'est aussi le cas si les composantes du vecteur ne varient pas quand on se déplace dans une direction qui lui est orthogonale. Mais lorsque les composantes du vecteur varient dans une direction qui lui est orthogonale, le rotationnel est non nul[1].

Qualitativement, on peut dire qu'un champ de vecteurs à rotationnel non nul « tourne » ou « tend à faire tourner » les objets sensibles à l'action de ce champ.

Enfin, si le rotationnel d'un champ de vecteurs est non nul en un point, on peut dire qu'en ce point existe une source de champ.

1. Dans les systèmes de coordonnées cylindrique et sphérique, certains champs ont une norme variable dans une direction orthogonale aux vecteurs et gardent un rotationnel nul.

Application 5 **Calcul de rotationnel**

Soient les champs de vecteurs $\vec{W} = x\,\vec{u}_x$ et $\vec{W}' = y\,\vec{u}_x$. Calculer leur rotationnel et représenter ces champs dans le plan xOy. Interpréter.

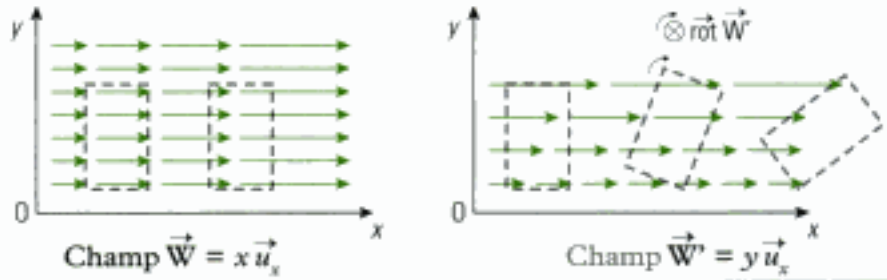
Solution

Le calcul en coordonnées cartésiennes donne directement :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} = \frac{\partial W_x}{\partial z}\vec{u}_y - \frac{\partial W_x}{\partial y}\vec{u}_z = \frac{\partial x}{\partial z}\vec{u}_y - \frac{\partial x}{\partial y}\vec{u}_z = \vec{0}.$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}' = \frac{\partial W'_x}{\partial z}\vec{u}_y - \frac{\partial W'_x}{\partial y}\vec{u}_z = \frac{\partial y}{\partial z}\vec{u}_y - \frac{\partial y}{\partial y}\vec{u}_z = -\vec{u}_z \neq \vec{0}.$$

Le tracé de ces champs dans le plan xOy donne les schémas suivants :



Champ $\vec{W} = x\,\vec{u}_x$ Champ $\vec{W}' = y\,\vec{u}_x$

Copyrighted material

– Le champ de vecteurs $\vec{W}' = y\,\vec{u}_x$ admet un rotationnel non nul en tout point. On remarque que dans la direction de Oy, orthogonale au champ, la norme de $\vec{W}'$ est modifiée. Plaçons un cadre dans l'espace, et supposons qu'il soit sensible au champ. On peut imaginer une planche ou un canoë dans une rivière, le champ étant le champ des vitesses de l'eau qui s'écoule. Alors le cadre aura tendance à se mettre à tourner « autour de l'axe » du rotationnel[1].

– En revanche, le champ de vecteurs $\vec{W} = x\,\vec{u}_x$ a un rotationnel nul en tout point. La norme du champ ne varie pas dans une direction qui lui est orthogonale, et si l'on place le même cadre dans ce champ, il ne pourra que se translater horizontalement.

En électromagnétisme, on constate souvent qu'un champ dont le rotationnel est non nul possède des lignes de champ « qui tournent ».

1. On peut se représenter le « vecteur rotation » du cadre par le rotationnel.

2. On dit aussi « formule de Stokes-Ampère ».

E.3. Formule de Stokes[2]

Propriété 5

La circulation d'un champ de vecteurs $\vec{W}$ le long d'un contour Γ est égal au flux de son rotationnel à travers toute surface ouverte S s'appuyant sur ce contour (fig.9) :

$$\oint_{\Gamma} \vec{W}\cdot\vec{dl} = \iint_{S} \vec{rot}\,\vec{W}\cdot\vec{dS}.$$



Fig. 9 - Contour Γ.

Cette formule est très utile en électromagnétisme, et nous verrons qu'elle permet la démonstration de la loi de Faraday[3].

C'est aussi à partir de cette formule que l'on peut définir l'opérateur rotationnel, ou retrouver son expression. Montrons-le pour les coordonnées cartésiennes.

Etudions le rectangle élémentaire orienté situé dans le plan Oxy et de normale $\vec{u}_z$ (fig.10). Si la surface considérée s'appuie sur ce contour simple[4], alors la circulation du champ n'est plus une intégrale mais simplement une somme de quatre termes correspondant aux côtés du contour étudié.

3. Voir chapitre 2, § D.3.

4. Le contour est infiniment petit.

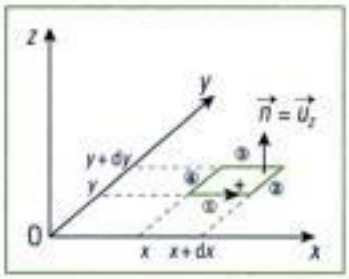


Fig. 10 - Rectangle élémentaire.

L'intégrale de la circulation vaut alors :

$$\oint_{4\text{côtés}} \vec{W}\cdot\vec{dl} = \underbrace{\vec{W}(x, y)\cdot dx\,\vec{u}_x}_{①} + \underbrace{\vec{W}(x + dx, y)\cdot dy\,\vec{u}_y}_{②}$$
$$+ \underbrace{\vec{W}(x + dx, y + dy)\cdot dx\,(-\vec{u}_x)}_{③} + \underbrace{\vec{W}(x, y + dy)\cdot dy\,(-\vec{u}_y)}_{④}.$$

$$\oint_{4\text{côtés}} \vec{W}\cdot\vec{dl} = W_x(x, y)dx + W_y(x + dx, y)dy$$
$$- \left[W_x(x, y + dy) + \frac{\partial W_x(x, y)}{\partial x}\,dx\right]dx$$
$$- \left[W_y(x, y) + \frac{\partial W_y(x, y)}{\partial y}\,dy\right]dy$$

Conservons uniquement les termes infiniment petits d'ordre un, c'est-à-dire les termes en dx et dy[5]. Il vient donc :

$$\oint_{4\text{côtés}} \vec{W}\cdot\vec{dl} = [W_x(x, y) - W_x(x, y + dy)]dx + [W_y(x + dx, y) - W_y(x, y)]dy.$$

$$\oint_{4\text{côtés}} \vec{W}\cdot\vec{dl} = \left[-\frac{\partial W_x}{\partial y}\,dy\right]dx + \left[\frac{\partial W_y}{\partial x}\,dx\right]dy = \left[\frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}\right]dS.$$

5. On rappelle que $\vec{W}$ est une fonction vectorielle continue et à dérivées continues, les dérivées de ses composantes sont donc bornées sur la partie de l'espace étudiée.

Copyrighted material

Or la formule de Stokes donne :

$$\oint_\Gamma \vec{W}\cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{W}\cdot d\vec{S} = \overrightarrow{rot}\,\vec{W}\Big)_z\, dS,$$

et il vient donc :

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{W}\Big)_z = \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y}.$$

C'est la composante selon Oz de $\overrightarrow{rot}\,\vec{W}$. On obtient les deux autres composantes selon Ox et Oy en utilisant des rectangles élémentaires dont les normales sont respectivement $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$[1].

1. Dans les autres systèmes de coordonnées, le raisonnement est le même en considérant un contour rectangulaire dont les cotés correspondent à la variation élémentaire de deux des trois coordonnées.

E.4. Champs à circulation conservative

Définition 4

Un champ de vecteurs $\vec{W}$ est dit « **à circulation conservative** » lorsque sa circulation C le long de toute ligne fermée (ou contour) Γ est nulle :

$$\text{pour tout contour } \Gamma,\ \oint_\Gamma \vec{W}\cdot d\vec{l} = 0.$$

En appliquant la formule de Stokes, il vient :

$$\oint_\Gamma \vec{W}\cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}\,\vec{W}\cdot d\vec{S} = 0,$$

quelle que soit la surface ouverte S qui s'appuie sur le contour Γ.

On peut donc en déduire, comme la surface S est quelconque :

Propriété 6

Un champ de vecteurs $\vec{W}$ est « **à circulation conservative** » si et seulement si :

$$\text{en tout point de l'espace[2]},\ \overrightarrow{rot}\,\vec{W} = \vec{0}.$$

2. En effet, la relation est aussi valable pour un contour Γ élémentaire (infiniment petit) n'entourant « qu'un seul point ».

F. Opérateur laplacien[3]

3. Pierre Simon de Laplace (1749-1827), mathématicien et physicien français. Ses travaux dans le calcul intégral et différentiel étaient tournés vers l'application des mathématiques à la physique. Ses axes de recherche concernaient l'astronomie, les probabilités et la thermodynamique : il a notamment découvert la loi $PV^\gamma = Cte$ qui porte son nom.

F.1. Définition

Le laplacien est un opérateur de dérivation spatiale qui peut s'appliquer à un champ de scalaires ou à un champ de vecteurs.

Définition 5

– L'expression du laplacien ΔU d'un champ de scalaires U est :

$$\Delta U = \mathbf{div}(\overrightarrow{\mathbf{grad}}\,U).$$

– L'expression du laplacien $\Delta\vec{W}$ d'un champ de vecteurs $\vec{W}$ est :

$$\Delta\vec{W} = \overrightarrow{\mathbf{grad}}(\mathbf{div}\vec{W}) - \overrightarrow{\mathbf{rot}}(\overrightarrow{\mathbf{rot}}\,\vec{W}).$$

– Le laplacien d'un champ de scalaires est un scalaire et son calcul se fait en utilisant les expressions des opérateurs gradient et divergence précédemment définis.

– Le laplacien d'un champ de vecteurs est un vecteur et le calcul se fait en utilisant les expressions des opérateurs gradient, rotationnel et divergence précédemment définis.

Copyrighted material

Le calcul du laplacien Δ d'un scalaire ou d'un champ de vecteurs nécessite une dérivée seconde par rapport à des coordonnées spatiales, son unité SI est donc le m^{-2}.

F.2. Interprétation physique

Bien moins évidente, elle combine celle des deux opérateurs qui composent le laplacien.

En coordonnées cartésiennes, il suffit que le champ ait une variation non linéaire par rapport à une des variables pour que son laplacien soit non nul.

Dans les autres systèmes de coordonnées, la démarche est plus compliquée, car les opérateurs divergence et rotationnel ne consistent pas simplement à dériver par rapport à la coordonnée d'espace correspondante.

Application 6 **Calcul de laplacien**

Soit le champ de scalaires $U = x^2y$. Calculer son laplacien et interpréter.

Solution

En coordonnées cartésiennes, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial (x^2y)}{\partial x} \\ \frac{\partial (x^2y)}{\partial y} \\ \frac{\partial (x^2y)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le laplacien vaut donc :

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,U) = \frac{\partial (2xy)}{\partial x} + \frac{\partial x^2}{\partial y} + 0 = 2y.$$

Il est non nul, car le champ de scalaires U est une fonction non linéaire de la variable x.

G. Opérateur Nabla[1]

G.1. Définition

Définition 6

L'opérateur Nabla $\vec{\nabla}$ n'est défini qu'en coordonnées cartésiennes. C'est un vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles par rapport à la coordonnée concernée :

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

1. L'opérateur Nabla est hors-programme. Néanmoins, son utilisation permet de retrouver de manière idiomatique les expressions des opérateurs vus précédemment en coordonnées cartésiennes et certaines propriétés entre ces opérateurs.

Copyrighted material

– Lorsque l'opérateur $\vec{\nabla}$ est appliqué à un champ de scalaires U, par lequel il est multiplié, on retrouve l'opérateur gradient :

$$\vec{\nabla}U = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \\ \frac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{grad}}\,U.$$

– Lorsque l'opérateur $\vec{\nabla}$ est appliqué à un champ de vecteurs $\vec{W}$, la « multiplication » peut être un produit scalaire ou un produit vectoriel. On reconnaît alors respectivement les opérateurs divergence et rotationnel :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} = \frac{\partial W_x}{\partial x} + \frac{\partial W_y}{\partial y} + \frac{\partial W_z}{\partial z} = \text{div}\,\vec{W}.$$

$$\vec{\nabla}\wedge\vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} W_x \\ W_y \\ W_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial W_z}{\partial y} - \frac{\partial W_y}{\partial z} \\ \frac{\partial W_x}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial x} \\ \frac{\partial W_y}{\partial x} - \frac{\partial W_x}{\partial y} \end{pmatrix} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}.$$

– Enfin, le laplacien scalaire s'écrit :

$$\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,U) = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}^2 U, \text{ soit } \Delta = \vec{\nabla}^2.$$

G.2. Utilité de Nabla

– Grâce à l'opérateur Nabla, on peut trouver simplement le résultat de composition de divers opérateurs ainsi, pour un champ de scalaires U :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}U) = \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}U = \vec{0}^{1}.$$

On admet la réciproque suivante, utilisée en électromagnétisme :

Propriété 7

Si un champ de vecteurs $\vec{W}$ est à rotationnel nul ($\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} = \vec{0}$), alors il existe un champ de scalaires U dont il est le gradient :

$$\vec{W} = -\overrightarrow{\text{grad}}U^{2}.$$

Le champ de scalaires U est appelé **potentiel scalaire** du champ de vecteurs[3].

1. Le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires est nul !

2. En physique, le signe négatif est purement conventionnel. Le champ électrostatique possède un potentiel scalaire (voir le cours de première année) ; on vérifiera cette année que son rotationnel est nul.

3. On dit que $\vec{W}$ « dérive » de U.

Copyrighted material

On remarque que si $\vec{W} = -\overrightarrow{\text{grad}}U$, alors le champ de vecteurs $\vec{W}$ est à circulation conservative[1] :

$$\int_A^B \vec{W} \cdot d\vec{l} = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}U \cdot d\vec{l} = U(A) - U(B).$$

1. Voir § C.4 de ce chapitre.

– Une démarche analogue permet d'écrire, pour un champ de vecteurs $\vec{W}$:

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{W}) = 0.$$

En effet, le produit vectoriel de deux vecteurs est orthogonal à chacun des deux vecteurs qui le constitue[2], et son produit scalaire par l'un de ces deux vecteurs est nul.

2. On peut donc conclure que, pour tout champ de vecteurs $\vec{W}$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}$ et $\vec{W}$ sont orthogonaux en tout point.

On admet de même la réciproque suivante :

Propriété 8

Si un champ de vecteurs $\vec{W}$ est à divergence nulle ($\text{div}\,\vec{W} = 0$), alors il existe un champ de vecteurs $\vec{A}$ dont il est le rotationnel :

$$\vec{W} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}.$$

Le champ de vecteurs $\vec{A}$ est appelé **potentiel vecteur** du champ de vecteurs[3].

3. Comme $\vec{W} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, le champ de vecteurs et son potentiel vecteur sont orthogonaux en tout point.

– Enfin, si on applique la formule du double produit vectoriel :

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

au double rotationnel, on obtient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{W}) = \vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \cdot \vec{W}) - (\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla})\vec{W},$$

soit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{W}) - \Delta\vec{W}.$$

4. On reconnaît la formule de définition du laplacien vectoriel.

Copyrighted material

L'essentiel

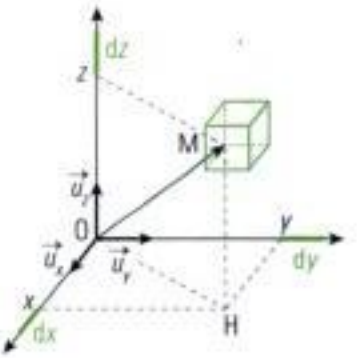
✓ Systèmes de coordonnées

• En coordonnées cartésiennes (x, y, z), on a :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z.$$

Une variation élémentaire dx, dy ou dz de chacune des coordonnées produit un déplacement respectif de $dx\,\vec{u}_x$, $dy\,\vec{u}_y$ ou $dz\,\vec{u}_z$.

Élément de volume : $\mathbf{dV = dx \times dy \times dz}$.

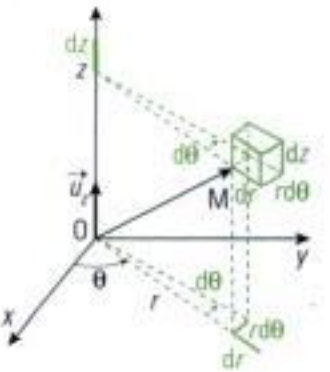


• En coordonnées cylindriques (r, θ, z), on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z.$$

Une variation élémentaire dr, $d\theta$ ou dz de chacune des coordonnées produit un déplacement respectif de $dr\,\vec{u}_r$, $r d\theta\,\vec{u}_\theta$ ou $dz\,\vec{u}_z$.

Élément de volume : $\mathbf{dV = dr \times r d\theta \times dz}$.

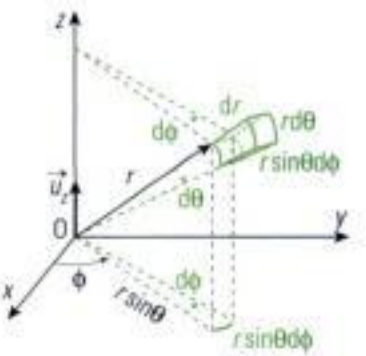


• En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ), on a :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r.$$

Une variation élémentaire dr, $d\theta$ ou $d\phi$ de chacune des coordonnées produit un déplacement respectif de $dr\,\vec{u}_r$, $r d\theta\,\vec{u}_\theta$ ou $r\sin\theta\, d\phi\,\vec{u}_\phi$.

Élément de volume : $\mathbf{dV = dr \times r d\theta \times r\sin\theta d\phi}$.



• Application du théorème de Fubini :

$$\iiint f(x)g(y)h(z)\,dx\,dy\,dz = \int_{x_0}^{x_1} f(x)\,dx \int_{y_0}^{y_1} g(y)\,dy \int_{z_0}^{z_1} h(z)\,dz.$$

✓ Opérateurs d'analyse vectorielle

• Le **gradient** est un vecteur obtenu à partir d'un champ de scalaires U.

En coordonnées cartésiennes, le gradient s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{U} = \vec{\nabla}\mathbf{U}.$$

Le gradient est non nul lorsque le champ U n'est pas uniforme, son orientation étant celle des valeurs croissantes du champ U.

– Le gradient est à circulation conservative. Entre deux points A et B, on a, quel que soit le chemin suivi :

$$\int_A^B \overrightarrow{\mathbf{grad}}\mathbf{U} \cdot \vec{dl} = \mathbf{U(B) - U(A)}.$$

Copyrighted material

• La **divergence** est un scalaire obtenu à partir d'un champ de vecteurs. En coordonnées cartésiennes, la divergence s'écrit :

$$\mathbf{div}\,\vec{W} = \vec{\nabla}\cdot\vec{W}.$$

– Lorsque la divergence est non nulle, la norme du vecteur varie le long des lignes de champ.

– **Formule d'Ostrogradsky** : le flux d'un champ de vecteurs $\vec{W}$ à travers une surface fermée S est égal à l'intégrale de la divergence de ce champ sur le volume V délimité par cette surface :

$$\oiint_S \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_V \mathbf{div}\,\vec{W}\,dV.$$

Conséquence : un champ de vecteurs à divergence nulle ($\mathrm{div}\,\vec{W} = 0$) est **à flux conservatif** : son flux $\oiint_S \vec{W}\cdot\vec{n}\,dS$ à travers toute surface fermée est nul et son flux à travers toute surface ouverte ne dépend pas de cette surface, mais seulement du contour sur lequel elle s'appuie.

– Un champ de vecteurs $\vec{W}$ à divergence nulle ($\mathrm{div}\,\vec{W} = 0$) possède un **potentiel vecteur** $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{W} = \mathbf{\vec{rot}}\,\vec{A}.$$

– Pour un champ de vecteurs $\vec{W}$, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{W} \text{ est à flux conservatif} \Leftrightarrow \mathrm{div}\,\vec{W} = 0 \text{ en tout point} \Leftrightarrow \exists\,\vec{A} / \vec{W} = \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{A}.$$

• Le **rotationnel** est un vecteur obtenu à partir d'un champ de vecteurs. En coordonnées cartésiennes, le rotationnel s'écrit :

$$\mathbf{\vec{rot}}\,\vec{W} = \vec{\nabla}\wedge\vec{W}.$$

– Les vecteurs $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{W}$ et $\vec{W}$ sont donc orthogonaux.

– Lorsque le rotationnel est non nul, la norme du vecteur ne reste pas constante dans une direction orthogonale à celle du vecteur. Généralement, les lignes de champ d'un champ de vecteurs à rotationnel non nul « tournent ».

– **Formule de Stokes** : la circulation d'un champ de vecteurs $\vec{W}$ le long d'un contour Γ est égal au flux de son rotationnel à travers toute surface ouverte S s'appuyant sur ce contour :

$$\oint_\Gamma \vec{W}\cdot\vec{dl} = \iint_S \mathbf{\vec{rot}}\,\vec{W}\cdot\vec{dS}.$$

Conséquence : un champ de vecteurs à rotationnel nul ($\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{W} = 0$) est **à circulation conservative** : sa circulation le long de toute ligne fermée est nulle et sa circulation entre deux points ne dépend pas du chemin suivi, mais seulement du point de départ et d'arrivée.

– Un champ de vecteurs à rotationnel nul ($\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{W} = 0$) possède un **potentiel scalaire** U tel que :

$$\vec{W} = -\,\mathbf{\vec{grad}}\,U.$$

– Pour un champ de vecteurs $\vec{W}$, on a les équivalences suivantes :

$$\vec{W} \text{ est à circulation conservative} \Leftrightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{W} = 0 \text{ en tout point} \Leftrightarrow \exists\,U / \vec{W} = -\,\vec{\mathrm{grad}}\,U.$$

• Le **laplacien** est un scalaire obtenu à partir d'un champ de scalaires ou un vecteur obtenu à partir d'un champ de vecteurs. En coordonnées cartésiennes, le laplacien s'écrit :

$\Delta U = \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}U = \vec{\nabla}^2 U$ si U est un champ de scalaires,

$$\Delta\vec{W} = \begin{pmatrix} \Delta W_x \\ \Delta W_y \\ \Delta W_z \end{pmatrix} \text{ si } \vec{W} \text{ est un champ de vecteurs.}$$

Copyrighted

Formulaire

On regroupe et explicite dans ce formulaire les expressions de tous les opérateurs d'analyse vectorielle dans les trois systèmes de coordonnées usuels. Soient U un champ de scalaire et $\vec{W}$ un champ de vecteurs.

✓ En coordonnées cartésiennes (x, y, z)

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \dfrac{\partial U}{\partial x}\vec{u}_x + \dfrac{\partial U}{\partial y}\vec{u}_y + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$

- $\text{div}\,\vec{W} = \dfrac{\partial W_x}{\partial x} + \dfrac{\partial W_y}{\partial y} + \dfrac{\partial W_z}{\partial z}$

- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial W_z}{\partial y} - \dfrac{\partial W_y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial W_x}{\partial z} - \dfrac{\partial W_z}{\partial x} \\ \dfrac{\partial W_y}{\partial x} - \dfrac{\partial W_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

- $\Delta U = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

- $\Delta\vec{W} = \begin{pmatrix} \Delta W_x \\ \Delta W_y \\ \Delta W_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 W_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 W_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 W_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 W_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 W_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 W_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 W_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$

✓ En coordonnées cylindriques (r, θ, z)

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \dfrac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \dfrac{\partial U}{\partial z}\vec{u}_z = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial U}{\partial z} \end{pmatrix}$

- $\text{div}\,\vec{W} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial (rW_r)}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial W_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{\partial W_z}{\partial z}$

Copyrighted material

- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\frac{\partial W_z}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial (rW_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial W_r}{\partial \theta} \end{pmatrix}$
- $\Delta U = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

✓ En coordonnées sphériques (r, θ, ϕ)

- $\overrightarrow{\text{grad}}\,U = \frac{\partial U}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}\vec{u}_\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi} \end{pmatrix}$
- $\text{div}\,\vec{W} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 W_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (W_\theta \sin\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial W_\phi}{\partial \phi}$
- $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (W_\phi \sin\theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial W_\theta}{\partial \phi}\right) \\ \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial W_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r}\frac{\partial (rW_\phi)}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rW_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial W_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix}$
- $\Delta U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial \phi^2}$

✓ Relations entre opérateurs

- $\text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}) = 0$.
- $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,U) = \vec{0}$.
- $\Delta U = \text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,U)$.
- $\Delta\vec{W} = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{W}) - \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W})$.
- $\overrightarrow{\text{grad}}(UV) = U\,\overrightarrow{\text{grad}}(V) + V\,\overrightarrow{\text{grad}}(U)$.
- $\text{div}(U\vec{W}) = \vec{W}\cdot\overrightarrow{\text{grad}}(U) + U\,\text{div}\vec{W}$.
- $\overrightarrow{\text{rot}}(U\vec{W}) = U\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} + \overrightarrow{\text{grad}}\,U \wedge \vec{W}$.
- $\text{div}(\vec{W} \wedge \vec{V}) = \vec{V}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} - \vec{W}\cdot\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{V}$.

Copyrighted

Exercices

Ex. 1 Circulation conservative

Montrer que le gradient d'un champ de scalaires U est à circulation conservative.

Ex. 2 Flux conservatif

Montrer que le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{W}$ est un champ à flux conservatif.

Ex. 3 Gradient en coordonnées cylindriques

Soit un champ de scalaires U défini dans tout l'espace.

On note :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial r} dr + \frac{\partial U}{\partial \theta} d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi} d\phi$$

la différentielle de U.

1) Exprimer dU en fonction de l'opérateur gradient.

2) Donner l'expression du déplacement élémentaire $\vec{dr}$ en coordonnées sphériques.

3) À partir de l'expression mathématique de la différentielle de U et de son expression en fonction du gradient, en déduire les trois composantes du gradient d'un champ de scalaires U dans le système des coordonnées sphériques.

Ex. 4 Divergence en coordonnées cylindriques

On se propose d'étudier l'opérateur divergence dans le système des coordonnées cylindriques.

1) Que représente l'opérateur divergence du champ de vecteurs $\vec{W}$ en terme de flux ?

2) Représenter un élément de volume dV en coordonnées cylindriques.

3) Calculer le flux du vecteur $\vec{W}$ à travers l'élément de volume.

4) En déduire l'expression de la divergence du champ de vecteurs $\vec{W}$ en coordonnées cylindriques.

Ex. 5 Rotationnel en coordonnées cylindriques

On se propose d'étudier la composante orthoradiale (suivant $\vec{u_\theta}$) du rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{W}$ dans le système des coordonnées cylindriques.

1) Que représente l'opérateur rotationnel du champ de vecteurs $\vec{W}$ en termes de circulation ?

2) Quel est le contour adapté à l'étude de la composante orthoradiale de l'opérateur rotationnel ?

3) En déduire l'expression de cette composante orthoradiale.

Copyrighted material

Solutions des exercices

Exercice 1

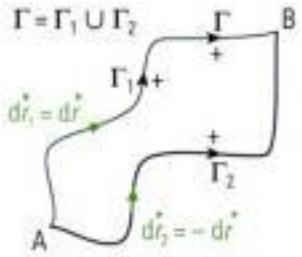
Montrons que la circulation de $\overrightarrow{\text{grad}}U$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi entre ces deux points.

• Soit un contour fermé Γ sur lequel est défini en tout point $\overrightarrow{\text{grad}}U$. La circulation de ce vecteur le long du contour fermé Γ s'écrit $\oint_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \vec{dr}$, où $\vec{dr}$ représente un déplacement élémentaire le long du contour.

Or, par définition, $dU = \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \vec{dr}$.

Donc $\oint_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \vec{dr} = \oint_\Gamma dU = 0$, puisque le contour est fermé.

• Soit maintenant deux lignes Γ_1 et Γ_2 quelconques reliant deux points A et B de l'espace et orientés de A vers B. Leur réunion forme un contour fermé Γ le long duquel la circulation du vecteur gradient est nulle :



$$0 = \oint_\Gamma \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \vec{dr} = \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \vec{dr} + \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \vec{dr}$$

$$= \int_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \vec{dr}_1 + \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot (-\vec{dr}_2),$$

d'où on en déduit :

$$\int_{\Gamma_1} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \vec{dr}_1 = \int_{\Gamma_2} \overrightarrow{\text{grad}}U \cdot \vec{dr}_2.$$

⚠ Sur la ligne Γ_2, on intègre du point B vers le point A, donc dans le sens opposé au contour : on prend alors un déplacement élémentaire $d\vec{r}_2 = -d\vec{r}$.

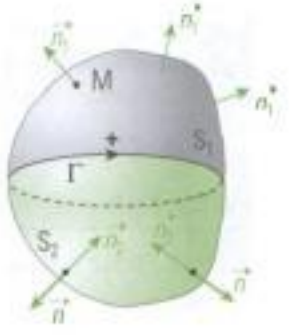
La circulation du gradient ne dépend pas du chemin suivi entre les points A et B, c'est donc un vecteur à circulation conservative.

On a aussi vu en cours que la réciproque est vérifiée (propriété 2).

Exercice 2

Montrons que le flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}$ à travers deux surfaces quelconques s'appuyant sur un même contour est égal.

Soit deux surfaces distinctes S_1 et S_2 s'appuyant sur le contour fermé Γ, leur réunion formant une surface S fermée.



Le flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}$ à travers la surface fermée S s'écrit $\oiint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} \cdot \vec{dS}$, où $\vec{dS} = \vec{n}\,dS$ représente un élément de surface S et $\vec{n}$ sa normale.

De même, le flux de $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}$ à travers la surface ouverte S_i s'écrit $\iint_{S_i} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} \cdot \vec{dS_i}$, où $\vec{dS_i} = \vec{n_i}\,dS$ représente un élément de surface S_i et $\vec{n_i}$ la normale respective.

D'après la formule d'Ostrogradsky, $\oiint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W} \cdot \vec{dS} = \iiint_V \text{div}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W})dV$, où V représente le volume délimité par la surface fermée S.

Copyright Material

Or le formulaire indique que $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}) = 0$.

Pour se souvenir de cette propriété, on raisonne en coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{W}) = 0,$$

d'après les propriétés combinées des produits scalaires et vectoriels.

Donc $\oiint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}\cdot d\vec{S} = 0$.

La surface S est orientée vers l'extérieur du volume, alors que les surfaces S_1 et S_2 sont orientées par le contour comme indiqué sur le schéma, avec $d\vec{S}_1 = d\vec{S}$ et $d\vec{S}_2 = -\,d\vec{S}$. D'où :

$$0 = \oiint_S \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}\cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}\cdot(-\,d\vec{S}_2).$$

On en conclut :

$$\boldsymbol{\iint_{S_1} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}\cdot d\vec{S}_1 = \iint_{S_2} \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{W}\cdot d\vec{S}_2}.$$

Le flux du rotationnel ne dépend pas de la surface ouverte s'appuyant sur le contour S, c'est donc un vecteur à flux conservatif.

On a aussi vu que la réciproque est vraie (propriété 8). En effet, si un champ $\vec{W}$ est à flux conservatif, alors $\mathrm{div}\,\vec{W} = 0$.

Exercice 3

1) Par définition, si on considère un déplacement élémentaire $d\vec{r}$ le long d'un contour quelconque :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\cdot d\vec{r} = dU}.$$

2) En coordonnées sphériques, le déplacement élémentaire $d\vec{r}$ s'écrit :

$$\boldsymbol{d\vec{r} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\vec{u}_\phi}.$$

3) D'après l'énoncé, $dU = \dfrac{\partial U}{\partial r}\,dr + \dfrac{\partial U}{\partial \theta}\,d\theta + \dfrac{\partial U}{\partial \phi}\,d\phi$.

Or, par définition, $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\cdot d\vec{r} = dU$.

Avec $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\big)_r\,\vec{u}_r + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\big)_\theta\,\vec{u}_\theta + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\big)_\phi\,\vec{u}_\phi$, on a :

$$dU = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\big)_r\,dr + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\big)_\theta\,r\,d\theta + \overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\big)_\phi\,r\sin\theta = \frac{\partial U}{\partial r}\,dr + \frac{\partial U}{\partial \theta}\,d\theta + \frac{\partial U}{\partial \phi}\,d\phi.$$

Par identification, on obtient :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\big)_r = \frac{\partial U}{\partial r}} \quad ; \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\big)_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \theta}} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\mathrm{U}\big)_\phi = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \phi}}.$$

On retrouve bien les expressions données dans le formulaire. La démarche de cet exercice est une démarche très générale qui permet de retrouver les composantes du gradient dans tout système de coordonnées.

Exercice 4

1) Pour toute surface fermée S, la formule d'Ostrogradsky permet d'écrire :

$$\oiint_S \vec{W}\cdot d\vec{S} = \iiint_V \mathrm{div}\,\vec{W}\,dV,$$

où V est le volume délimité par la surface S.

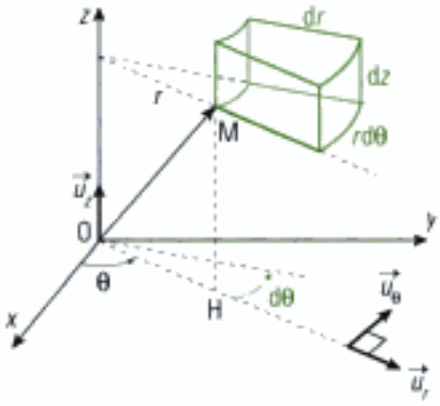
Copyrighted material

Donc, si on considère l'intégration sur un volume élémentaire dV , on en déduit :

$$\text{div}\vec{W}\,dV = \oiint_S \vec{W}\cdot d\vec{S}.$$

L'opérateur divergence représente donc le flux du vecteur $\vec{W}$ à travers la surface fermée entourant un élément de volume.

2) En coordonnées cylindrique, l'élément de volume est une portion de cylindre que l'on assimile à un parallélépipède rectangle de volume élémentaire $\mathbf{dV = dr \times r\,d\theta \times dz}$.



3) Pour calculer le flux total du vecteur $\vec{W}$ à travers le volume, on ajoute les flux à travers chacune des six faces du parallélépipède. On reprend l'élément de volume représenté à la question **2)**. Il est important de se rappeler que la surface entourant le volume est une surface fermée orientée de l'intérieur vers l'extérieur du volume.

On raisonne par paires de faces opposées sur l'élément de volume. Chaque paire correspond à la variation élémentaire d'une coordonnée.

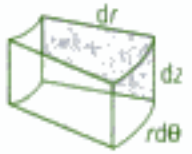
• Variations de θ

Pour la face colorée en vert sur le dessin ci-contre, le flux de $\vec{W}$ est égal à :

$$\vec{W}\cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta, z)\cdot dS(-\vec{u}_\theta) = -W_\theta(r, \theta, z)drdz.$$

Pour la face colorée en gris sur le dessin ci-contre, le flux de $\vec{W}$ est égal à :

$$\vec{W}\cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta + d\theta, z)\cdot dS\,\vec{u}_\theta = W_\theta(r, \theta + d\theta, z)drdz.$$



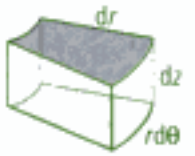
• Variations de *z*

Pour la face colorée en vert sur le dessin ci-contre, le flux de $\vec{W}$ est égal à :

$$\vec{W}\cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta, z)\cdot dS(-\vec{u}_z) = -W_z(r, \theta, z)rdrd\theta.$$

Pour la face colorée en gris sur le dessin ci-contre, le flux de $\vec{W}$ est égal à :

$$\vec{W}\cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta, z + dz)\cdot dS\,\vec{u}_z = W_z(r, \theta, z + dz)rdrd\theta.$$



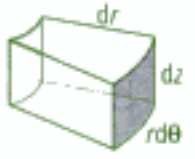
• Variations de *r*

Pour la face colorée en vert sur le dessin ci-contre, le flux de $\vec{W}$ est égal à :

$$\vec{W}\cdot d\vec{S} = \vec{W}(r, \theta, z)\cdot dS(-\vec{u}_r) = -W_r(r, \theta, z)rd\theta dz.$$

Pour la face colorée en gris sur le dessin ci-contre, le flux de $\vec{W}$ est égal à :

$$\vec{W}\cdot d\vec{S} = \vec{W}(r + dr, \theta, z)\cdot dS\,\vec{u}_r = W_r(r + dr, \theta, z)rd\theta dz.$$



Donc le flux total de vaut :

$$\oiint_S \vec{W}\cdot d\vec{S} = \Big[W_r(r + dr, \theta, z) - W_r(r, \theta, z)\Big]rd\theta dz + \Big[W_\theta(r, \theta + d\theta, z) - W_\theta(r, \theta, z)\Big]drdz + \Big[W_z(r, \theta, z + dz) - W_z(r, \theta, z)\Big]rdrd\theta.$$

Or, si dr est suffisamment petit, $\dfrac{W_r(r + dr, \theta, z) - W_r(r, \theta, z)}{dr} = \dfrac{\partial W_r}{\partial r}(r, \theta, z)$.

Copyright Material

De même, pour les autres termes :

$$\frac{W_\theta(r, \theta + d\theta, z) - W_\theta(r, \theta, z)}{d\theta} = \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z)$$

et

$$\frac{W_z(r, \theta, z + dz) - W_z(r, \theta, z)}{dz} = \frac{\partial W_z}{\partial z}(r, \theta, z).$$

En effet, mathématiquement, la dérivée d'une fonction se définit par la limite du rapport :

$$\lim_{dx \to 0} \frac{f(x + dx) - f(x)}{dx} = \frac{df(x)}{dx}.$$

On en conclut que :

$$\oiint_S \vec{W} \cdot d\vec{S} = \left(\frac{\partial W_r}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial W_z}{\partial z}(r, \theta, z) \right) dV.$$

4) Or, d'après la question **1)**, on a :

$$\text{div}\vec{W}\, dV = \oiint_S \vec{W} \cdot d\vec{S}.$$

Donc :

$$\mathbf{div}\vec{W} = \frac{\partial W_r}{\partial r}(r, \theta, z) + \frac{1}{r} \frac{\partial W_\theta}{\partial \theta}(r, \theta, z) + \frac{\partial W_z}{\partial z}(r, \theta, z).$$

On retrouve bien l'expression donnée dans le formulaire. La démarche de cet exercice est une démarche très générale qui permet de retrouver l'expression de la divergence dans tout système de coordonnées.

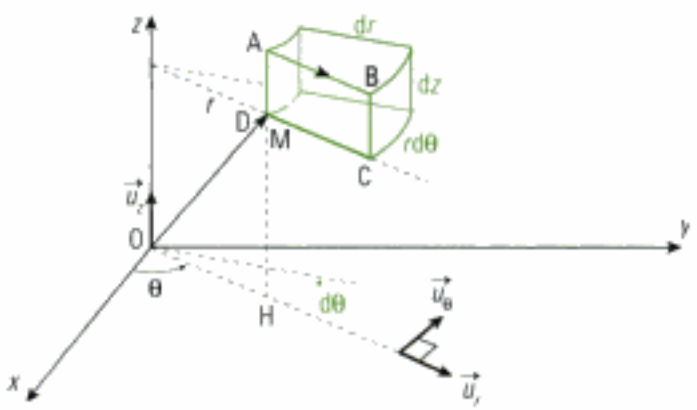
Exercice 5

1) Pour tout contour fermé Γ, la formule de Stokes permet d'écrire :

$$\oint_\Gamma \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\, \vec{W} \cdot d\vec{S},$$

où S est une surface ouverte quelconque s'appuyant sur le contour Γ. **Le flux du rotationnel de $\vec{W}$ à travers une surface élémentaire est donc égal à la circulation du vecteur $\vec{W}$ le long du contour sur lequel s'appuie cette surface.**

2) On cherche les composantes orthoradiales du rotationnel de $\vec{W}$. Pour cela, il faut donc considérer une surface orientée de normale $\vec{u}_\theta$, c'est-à-dire par exemple la surface représentée en vert sur le schéma ci-dessus. Le contour adapté est alors le contour Γ représenté en vert.



Copyrighted material

3) On suppose que le contour élémentaire a des dimensions faibles, de sorte que l'on peut considérer que $\vec{W} \cdot d\vec{l} = W_l \, dl$, où W_l représente la composante du vecteur $\vec{W}$ dans la direction du vecteur $d\vec{l}$.

Afin de calculer la circulation, on a orienté le contour dans le sens ABCD indiqué sur le schéma. On trouve :

$$\oint_\Gamma \vec{W} \cdot d\vec{l} = \vec{W} \cdot \overrightarrow{AB} + \vec{W} \cdot \overrightarrow{BC} + \vec{W} \cdot \overrightarrow{CD} + \vec{W} \cdot \overrightarrow{DA}$$

$$= W_z(r, \theta, z + dz)dr - W_r(r + dr, \theta, z)dz - W_z(r, \theta, z)dr + W_r(r, \theta, z)dz.$$

Or,

$$\frac{W_z(r + dr, \theta, z) - W_z(r, \theta, z)}{dr} = \frac{\partial W_z}{\partial r}(r, \theta, z)$$

et

$$\frac{W_r(r, \theta, z + dz) - W_r(r, \theta, z)}{dz} = \frac{\partial W_r}{\partial z}(r, \theta, z).$$

On en déduit :

$$\oint_\Gamma \vec{W} \cdot d\vec{l} = \left(\frac{\partial W_r}{\partial z}(r, \theta, z) - \frac{\partial W_z}{\partial r}(r, \theta, z) \right) dr dz.$$

Comme $\oint_\Gamma \vec{W} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{rot}\, \vec{W} \cdot d\vec{S} = \iint_S \overrightarrow{rot}\, \vec{W} \cdot dS \, \vec{u}_\theta = \overrightarrow{rot}\, \vec{W} \Big)_\theta dr dz$, on en conclut :

$$\boldsymbol{\overrightarrow{rot}\, \vec{W} \Big)_\theta = \frac{\partial W_r}{\partial z}(r, \theta, z) - \frac{\partial W_z}{\partial r}(r, \theta, z).}$$

On retrouve bien l'expression donnée dans le formulaire. La démarche de cet exercice est une démarche très générale qui permet de retrouver les composantes du rotationnel dans tout système de coordonnées.

Copyright Material

Copyrighted material

CHAPITRE

2 Les équations locales de l'électromagnétisme

Introduction

D'un point de vue historique, on constate que les lois physiques de l'électromagnétisme ont été découvertes sans liaison les unes avec autres et de manière incomplète (champ électrostatique, champ magnétostatique). De cet ensemble disparate de lois, Maxwell en a tiré des équations plus générales. Il a été avéré par la suite qu'il était possible de démontrer toutes les lois de l'électromagnétisme à partir des seules équations de Maxwell. En postulant d'abord ces équations, c'est cette démarche inverse à l'évolution historique, qui permet un raisonnement déductif, que l'on propose dans ce cours. Il suffit donc, pour accéder à l'ensemble des lois ou théorèmes de l'électromagnétisme, d'admettre les quatre équations de Maxwell. Cela est possible car ces équations locales sont des équations vectorielles valables en tout point de l'espace, dans tout milieu, et à tout instant.

Les équations de Maxwell relient les deux composantes $\vec{E}$ et $\vec{B}$ du champ électromagnétique à leurs sources, les densités de charges et de courants.

La démarche du cours, conforme au programme, met l'accent sur l'interprétation physique des équations mathématiques, plutôt que sur l'aspect calculatoire ou théorique.

Plan du chapitre 2

A. Les sources de champ électromagnétique 34
B. Milieux diélectriques 38
C. Les équations de Maxwell 40
D. Formulation intégrale des équations de Maxwell 44
E. Étude des potentiels 46
F. Étude de la statique 47
G. Relations de passage du champ électromagnétique 50
H. Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires 54
I. Effet de peau 56
J. Étude énergétique 60

Méthodes
L'essentiel ; mise en œuvre 63

Énoncés des exercices 71
Indications 75
Solutions des exercices 76

Copyrighted material

A. Les sources de champ électromagnétique

Ce sont les charges électriques. Parmi elles, on distingue les charges mobiles et les charges fixes. Lorsqu'on parlera de charges électriques, il s'agira de celles qui sont fixes, car les autres définissent par leur mouvement le courant électrique.

A.1. Échelle d'observation et continuité

A l'échelle atomique, deux noyaux d'atomes voisins sont séparés par du vide. Alors que la dimension du noyau est de l'ordre de 10^{-15} m, la distance entre deux noyaux les plus proches est d'environ 10^{-10} m. La masse étant concentrée en quasi-totalité dans les noyaux (de masse très supérieure à celle des électrons), on en déduit que la matière est concentrée dans de petits espaces séparés de vide : **la masse est donc discontinue à l'échelle atomique**.

À l'échelle macroscopique, c'est-à-dire à l'échelle de mesure que notre œil peut appréhender (le centimètre ou le mètre), une planche nous paraît homogène et la discontinuité précédente n'est pas ressentie. Il en est de même à l'échelle dite « mésoscopique » du micromètre, très grande devant l'échelle atomique, mais infinitésimale devant l'échelle macroscopique.

Un élément de volume « mésoscopique » $d\tau$ semble infinitésimal à l'échelle macroscopique ; il apparaît alors comme un point. Il contient approximativement 10^{11} à 10^{13} atomes. On ne peut alors pas distinguer les masses et le vide dans le volume $d\tau$. On suppose alors que la matière est un milieu continu. On parle, à l'échelle microscopique, d'approximation des milieux continus[1].

1. L'approximation des milieux continus est valable *a fortiori* à l'échelle macroscopique.

En seconde année, on se place à l'échelle mésoscopique : un volume « infiniment petit » ou « élémentaire » est alors de dimension mésoscopique et on peut donc appliquer l'approximation des milieux continus à toutes les situations.

A.2. Densité volumique de charges

Lorsqu'un élément de volume « élémentaire »[2] $d\tau$ centré sur un point P contient une charge électrique élémentaire dq, on peut définir la densité volumique de charges ρ présente en un point P :

2. Il est d'échelle mésoscopique et le volume semble être le point P à l'échelle macroscopique.

Définition 1

La **densité volumique de charges** présente en un point P de l'espace est :

$$\rho(P) = \frac{dq}{d\tau},$$

où dq est la charge électrique élémentaire présente dans le volume élémentaire $d\tau$ centré sur le point P.

L'unité SI de la densité volumique de charges ρ est le $C \cdot m^{-3}$, la charge dq s'exprimant en coulombs C et le volume $d\tau$ en m^3.

Ainsi, la charge électrique comprise dans un volume τ est égale à la somme des charges présentes en tous points P constituant le volume :

$$q = \iiint_\tau dq = \iiint_\tau \rho(P) d\tau \,^{3}.$$

3. L'intégrale doit être considérée comme une addition d'une infinité d'éléments infiniment petits, et non comme une recherche de primitive.

A.3. Densité surfacique de charges[1]

Lorsqu'une charge se trouve, à l'échelle macroscopique, répartie sur une surface[2], on parle de densité surfacique de charges électriques.

Comme les atomes ou molécules chargés occupent nécessairement un certain volume dans l'espace, il est donc inconcevable physiquement de pouvoir trouver des charges sur une surface. La densité surfacique est une modélisation mathématique. Une surface est considérée être une couche de grande étendue devant son épaisseur, laquelle pourra être considérée comme nulle[3].

Si on note Δl l'épaisseur de cette couche[4], dans laquelle existe une densité volumique de charges ρ, alors on peut définir une densité surfacique σ de charges à l'échelle macroscopique :

1. On parle aussi de densité « superficielle ».
2. Par exemple, un bon conducteur ne peut être chargé que sur sa surface à l'échelle macroscopique.
3. Cette épaisseur est nulle à l'échelle macroscopique.
4. Δl est mésoscopique.



Fig. 1 - Surface S d'épaisseur Δl.

Définition 2

On dit qu'une charge électrique admet une **densité surfacique de charges** σ sur une surface S si l'épaisseur Δl de la couche chargée est très inférieure aux dimensions de la surface S (fig.1). Avec ρ densité volumique de charges dans la couche Δl, on a alors :

$$\sigma = \int_0^{\Delta l} \rho \, dl \,,$$

où l'intégrale est faite sur l'épaisseur Δl, c'est-à-dire dans une direction orthogonale à la surface considérée.

L'unité de σ est le $C \cdot m^{-2}$, car son unité est celle de ρ multipliée par une longueur.

Ainsi, la charge électrique de la surface S est égale à la somme des charges $\sigma(P)dS$ présentes en tous points P constituant la surface :

$$q = \iint_S dq = \iint_{P \in S} \sigma(P) dS \,,$$

où l'élément de surface dS est centré sur le point P.

5. L'intégrale doit être considérée comme une addition d'une infinité d'éléments infiniment petits, et non comme une recherche de primitive.

A.4. Densité de courant volumique

Le courant électrique correspond à un mouvement de charges électriques. On mesure à l'aide d'un ampèremètre l'intensité du courant électrique qui parcourt un fil.

Lorsque l'on se place à une échelle d'observation mésoscopique, le fil n'est plus infiniment fin et apparaît comme un solide[6].

À l'échelle mésoscopique , la matière de ce milieu peut libérer n porteurs de charges par unité de volume. On note q la charge de chaque porteur mobile.

On considère un volume élémentaire centré sur un point M. On choisit un cylindre droit de base dS et de génératrice dl colinéaire au courant électrique (fig. 2).

Le volume élémentaire $d\tau = d\vec{S} \cdot d\vec{l}$ contient $dN = n d\tau = n \, d\vec{S} \cdot d\vec{l}$ porteurs de charges libres q. La charge du volume $d\tau$ est donc :

$$dq = q dN = nq d\tau = nq \, d\vec{S} \cdot d\vec{l} \,.$$

Les charges mobiles possédant la vitesse v[7] parcourent la hauteur dl du cylindre élémentaire pendant un intervalle de temps élémentaire dt tel que : $d\vec{l} = \vec{v} dt$.

6. C'est un milieu conducteur, dans lequel le déplacement des charges est possible.

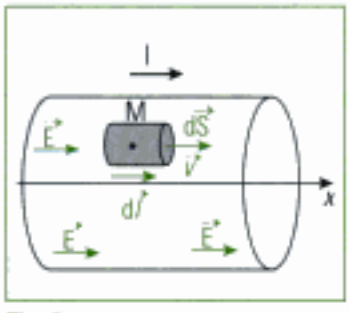


Fig. 2 - Volume élémentaire centré sur un point M.

7. Il s'agit d'une valeur moyenne dans ce modèle.

Copyrighted material

Ainsi, l'intensité élémentaire di [4] du courant électrique traversant l'élément de surface dS est donné par :

$$di = \frac{dq}{dt} = q\frac{dN}{dt} = nq\frac{d\tau}{dt} = nq\,d\vec{S}\cdot\frac{d\vec{l}}{dt} = nq\,\vec{v}\cdot d\vec{S}.$$

Pour obtenir l'intensité totale du courant électrique, il faut ajouter toutes les intensités élémentaires, c'est-à-dire intégrer di sur la section S du conducteur.

On définit alors le vecteur densité de courant :

$$\vec{j} = nq\,\vec{v} = \rho_m\,\vec{v},$$

expression dans laquelle $\rho_m = nq$ désigne la densité volumique de charges mobiles possédant la vitesse $\vec{v}$ [2].

Ainsi, on écrit et l'intensité totale s'écrit :

$$I = \int di = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}.$$

L'intensité totale qui traverse une section S de conducteur est donc égale au flux du vecteur densité de courant à travers cette section.

Définition 3

Le **vecteur densité de courant** $\vec{j}$ est défini par

$$\vec{j} = nq\,\vec{v} = \rho_m\,\vec{v},$$

où $\rho_m = nq$ est la densité volumique de charges des porteurs mobiles de vitesse $\vec{v}$.

L'intensité totale I qui travers une section S de conducteur est obtenue en calculant le flux de $\vec{j}$ à travers cette section :

$$I = \int di = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}.$$

L'intensité I s'exprimant en ampères A et la surface dS en m², l'unité du vecteur densité de courant [3] volumique $\vec{j}$ est l'$A\cdot m^{-2}$ [4].

A.5. Densité de courant surfacique

Lorsqu'un courant se trouve, à l'échelle macroscopique, étendu sur une surface [5], on parle de densité de courant surfacique.

Comme les charges mobiles occupent nécessairement un certain volume dans l'espace, il est inconcevable physiquement de pouvoir trouver un courant sur une surface.

On en fait donc une modélisation mathématique en simulant une nappe de courant qui circulerait sur une surface S dont l'épaisseur serait négligeable devant la superficie de S [6].

Si on note Δl l'épaisseur de cette couche [7], dans laquelle existe une densité volumique de charges mobiles ρ_m, alors on peut définir une densité de courant surfacique à l'échelle macroscopique :

Définition 4

On dit qu'un courant admet une **densité surfacique $\vec{j}_S$ de courant** sur une surface S si l'épaisseur Δl de la couche où circulent les charges mobiles de densité volumique ρ_m est très inférieure aux dimensions de la surface S. La densité de courant surfacique est donnée par :

$$\vec{j}_S = \int_0^{\Delta l} \vec{j}\,dl,$$

où l'intégrale est faite sur l'épaisseur Δl, c'est-à-dire dans une direction orthogonale à la surface considérée.

1. On rappelle que l'intensité qui traverse une surface dS est la quantité de charges qui traversent cette surface par unité de temps.

2. Dans la définition du vecteur densité de courant, il s'agit de la densité des charges qui se déplacent, totalement différente de toute densité de charges fixes, par exemple celle des ions du réseau cristallin ou la densité de charges vue en électrostatique.

3. Si l'on parlait de densité volumique de courant, alors l'unité devrait être en $A\cdot m^{-3}$, ce qui n'est pas le cas. Mais comme le courant est bien réparti dans un volume, il est logique de parler de courant volumique, d'où le nom de « densité de courant volumique » pour $\vec{j}$.

4. Ce concept de densité de courant a déjà été introduit en première année dans le cours d'électrocinétique.

5. C'est alors une nappe de courant, que l'on peut par exemple obtenir lorsque du courant électrique parcourt une bande métallique de très faible épaisseur.

6. Cette épaisseur est nulle à l'échelle macroscopique.

7. Δl est mésoscopique.

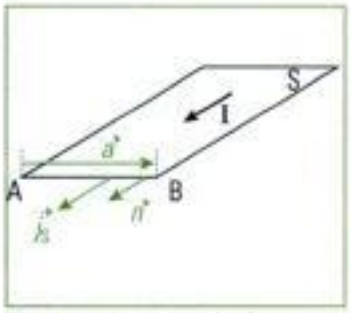


Fig. 3 - Flux du vecteur $\vec{j}_s$ à travers la ligne [AB].

L'unité de $\vec{j}_s$ est le $A \cdot m^{-1}$, car son unité est celle de $\vec{j}$ multipliée par une longueur.

Ainsi, le courant électrique qui parcourt une surface S est égal au flux du vecteur densité surfacique de courant à travers une ligne[1] (fig. 3). L'intensité passant à travers une ligne [AB] contenue dans la surface S s'écrit :

$$I = \int_A^B di = \int_A^B \vec{j}_s \cdot \vec{n}\, da^{[2]},$$

où da est l'élément de longueur de la ligne [AB] et $\vec{n}$ un vecteur unitaire tangeant à la surface S et normal à la ligne en tout point.

1. Une ligne peut être considéré comme la « section » d'une surface.

2. L'intégrale doit être considérée comme une addition d'une infinité d'éléments infiniment petits, et non comme une recherche de primitive.

A.6. Équation locale de conservation de la charge

Considérons un volume τ délimité par la surface S, dans lequel existe une densité volumique de charges ρ, non uniforme et variable dans le temps (fig. 4). Alors la charge totale $Q(t)$ dans le volume ρ est égale à :

$$Q(t) = \iiint_\tau \rho(P, t)\, d\tau.$$

Entre les instants t et $t + dt$, la charge totale varie de $dQ(t)$. On a alors :

$$\frac{dQ(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \iiint_\tau \rho(P, t)\, d\tau = \iiint_\tau \frac{\partial \rho(P, t)}{\partial t}\, d\tau^{[3]}. \quad \textbf{(1)}$$

Intéressons nous maintenant à la charge qui a traversé, entre les instants t et $t + dt$, la surface entourant le volume τ. Il s'agit des charges mobiles avec la densité de courant $\vec{j}$.

Un courant électrique $I = \oiint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \text{div}\, \vec{j}\, d\tau^{[4]}$ est sorti de S[5]. Par conséquent, l'intensité reçue par le volume τ est égale à :

$$I_{reçu} = \frac{dQ(t)}{dt} = -\iiint_\tau \text{div}\, \vec{j}\, d\tau. \quad \textbf{(2)}$$

Il reste à écrire la conservation de la charge, d'après les équations **(1)** et **(2)** :

$$\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t}\, d\tau = -\iiint_\tau \text{div}\, \vec{j}\, d\tau, \text{ ou :}$$

$$\iiint_\tau \left(\text{div}\, \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) d\tau = 0.$$

Comme la démonstration reste valable pour tout volume τ, on en déduit :



Fig. 4 - Volume τ de surface S.

3. Ce résultat est abordé en mathématiques 2e année concernant les intégrales à paramètre. Il est valable pour des fonctions ρ suffisamment régulières, ce que nous supposerons.

4. On a utilisé la formule d'Ostrogradsky, voir chapitre 1, §D.3.

5. En effet, la normale à toute surface fermée est sortante et le courant est compté positivement s'il sort de S.

Propriété 1

Équation locale de conservation de la charge

$$\text{div}\, \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Cette relation est valable en chaque point de l'espace[6].

Chaque terme peut être interprété physiquement, au vu de la démarche concrète qui a été conduite dans le calcul.

Le terme $\text{div}\, \vec{j}$ représente le flux des charges à la surface, alors que le terme $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ représente l'augmentation de la charge présente en un point. L'équation traduit alors le fait que la variation de charge en un point est due au seul fait qu'il y a eu déplacement, c'est-à-dire entrée ou sortie, de charges. Il n'y a donc pas de création de charges.

6. Cette équation est analogue à l'équation locale de la conservation de la masse en mécanique des fluides, dont la démonstration est similaire.

Copyrighted material

1. Ce sont les milieux dits isolants.

2. À l'état naturel, la matière reste globalement neutre.

3. S'ils le sont, on peut appliquer le principe de superposition et imaginer un diélectrique non chargé superposé à une densité de charges.

4. Cela signifie que ce phénomène est négligeable devant les suivants.

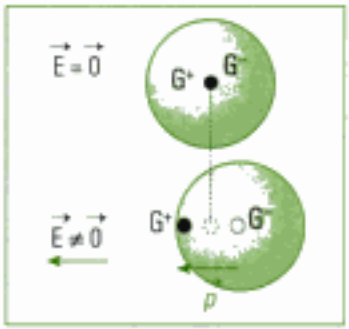


Fig. 5 - Polarisation électronique.

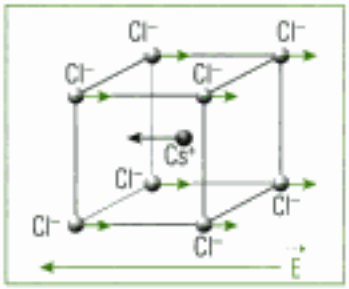


Fig. 6 - Exemple de polarisation ionique sur un réseau chlorure de césium.

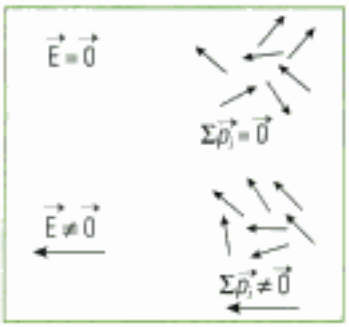


Fig. 7 - Polarisation par orientation

5. Ce sont des molécules polaires.

6. La molécule d'eau possède un moment dipolaire individuel, car l'atome d'oxygène a tendance à attirer vers lui les électrons des atomes d'hydrogène.

7. Voir le cours d'électromagnétisme de première année. On peut rappeler qu'un couple $\vec{\Gamma} = \vec{P} \wedge \vec{E}$ s'applique sur la molécule.

8. L'élément $d\tau$ étant de dimension mésoscopique, $d\vec{p}$ est le moment dipolaire résultant de la somme sur un grand nombre d'atomes. Cependant, il reste petit devant le moment dipolaire acquis par un volume diélectrique de dimension macroscopique.

B. Milieux diélectriques

Les milieux diélectriques sont ceux pour lesquels les atomes ne peuvent pas libérer de charges qui participent à la conduction du courant électrique[1].

Si le milieu est chargé, les charges présentes sont donc nécessairement fixes et ont été apportées par un opérateur[2].

On considérera dans l'étude que les milieux diélectriques étudiés sont non chargés[3].

B.1. La polarisation

Lorsqu'un diélectrique est plongé dans un champ électrique (dit « champ extérieur »), chaque molécule ou atome le constituant devient un dipôle électrique : c'est le phénomène de polarisation.

On distingue trois types de polarisation.

• **La polarisation électronique** (fig. 5). Lorsque l'atome se trouve dans le champ électrique extérieur, son nuage électronique et son noyaux subissent des forces de Coulomb opposées, de sorte que les barycentres G^+ et G^- respectivement des charges positives et négatives ne sont plus superposés. Il apparaît alors un moment dipolaire et on dit que la matière se polarise. C'est la polarisation électronique qui apparaît pour tous les atomes ou molécules plongés dans un champ électrique extérieur. Ce type de polarisation est masqué par tous les autres[4].

• **La polarisation ionique** (fig. 6). Lorsque l'on a affaire à un réseau cristallin ionique, le décalage des ions positifs et négatifs dans le champ extérieur crée de manière analogue des moments dipolaires : c'est la polarisation ionique, dont les effets sont plus importants que ceux de la polarisation électronique avec laquelle elle se superpose.

• **La polarisation par orientation** (fig. 7). Dans un liquide ou un gaz, lorsque les molécules possèdant un moment dipolaire individuel[5] $\vec{P}$ évoluent en l'absence de champ électrique extérieur[6], on n'observe pas de moment dipolaire à l'échelle macroscopique : il n'y a pas de polarisation. En effet, les moments dipolaires individuels s'orientent dans l'espace de manière aléatoire au gré de l'agitation thermique, de sorte que le moment dipolaire résultant reste nul. En présence du champ électrique extérieur, les moments dipolaires individuels $\vec{P}$ s'orientent dans le sens du champ extérieur[7], gênés par l'agitation thermique : c'est le phénomène de polarisation par orientation. Il masque les autres causes de polarisation car son effet est dominant.

B.2. Vecteur polarisation

Considérons un élément de volume $d\tau$ de diélectrique polarisé. Il possède donc un moment dipolaire $d\vec{p}$ non nul[8].

Pour caractériser et quantifier ce phénomène de polarisation, on définit le vecteur polarisation $\vec{P}$ en tout point du milieu diélectrique par la relation :

Propriété 2

Le **vecteur polarisation** $\vec{P}$ est une densité volumique de moment dipolaire :

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{d\tau}.$$

Copyrighted material

Son unité SI est celle de $\vec{p}$, le C·m, divisée par un volume, soit le C·m^{-2}.

Le moment dipolaire total $\vec{p}_0$ du volume τ est donc la somme des moments dipolaires des éléments de volume qui le constituent :

$$\vec{p}_0 = \iiint_\tau \mathrm{d}\vec{p} = \iiint_\tau \vec{P}\,\mathrm{d}\tau.$$

B.3. Densité de courant équivalente

Le but des paragraphes B.3 et B.4 est de montrer que la présence de matière diélectrique non chargée, mais polarisée, est équivalente à celle d'une densité de courant volumique et d'une densité volumique de charges.

Plongée dans un champ extérieur, la matière diélectrique se polarise. Lorsque le champ extérieur dépend du temps[1], les charges $+q$ et $-q$ des moments dipolaires individuels des atomes ou molécules subissent une force de Coulomb variable et se mettent en mouvement autour de leur position d'équilibre : on note respectivement $\vec{v}^+$ et $\vec{v}^-$ leur vitesse à l'instant t quelconque considéré (fig. 8).

1. C'est le cas lorsque l'on travaille avec des ondes électromagnétiques qui peuvent être sinusoïdales.

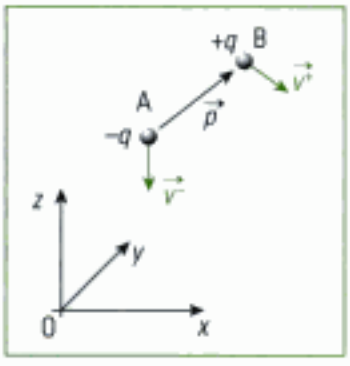


Fig. 8 - Moment dipolaire individuel.

Soit n le nombre de tels moments dipolaires par unité de volume. Le mouvement de ces charges crée une densité de courant volumique $\vec{j}_p$ déjà définie dans le paragraphe A.3 et donnée par la relation suivante :

$$\vec{j}_p = nq\,\vec{v}^+ = \rho_m\,\vec{v}^-.$$

Ici, il y a n charges $+q$ et n charges $-q$ par unité de volume, possédant respectivement la vitesse $\vec{v}^+$ et $\vec{v}^-$, et la densité de courant s'écrit :

$$\vec{j}_p = nq\,\vec{v}^+ + n(-q)\,\vec{v}^- = nq\left(\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OB}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}\right) = nq\,\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t},$$

soit :

$$\vec{j}_p = n\,\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(n\vec{p}) = \frac{\mathrm{d}\vec{P}}{\mathrm{d}t},$$

car $n\vec{p}$ est bien la densité volumique de moment dipolaire[2].

2. On compte en effet n dipôles par unité de volume, chacun de même moment dipolaire $\vec{p}$.

Le calcul a été effectué en un point donné, à coordonnées fixées. Comme $\vec{P}(M, t)$ dépend aussi du point, la dérivée temporelle n'est alors qu'une dérivée partielle. On en conclut donc :

Définition 6

La matière diélectrique polarisée peut être considérée comme du vide siège d'une densité de courant volumique fictif[3]. On parle de **courants liés**[4], par opposition aux courants véritables, dits libres. Cette **densité de courants liés** présente en tout point de la matière diélectrique polarisée s'écrit :

$$\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t},$$

avec $\vec{P}$ vecteur polarisation.

3. Un isolant ne laisse pas passer le courant électrique : il ne peut donc s'agir de courants « vrais ». Une polarisation variable se comporte comme une densité de courant volumique : celui-ci est fictif. Il constitue une partie de l'un des modèles de la matière diélectrique.

4. Ils sont liés à la présence de matière diélectrique, d'où ce qualificatif.

B.4. Densité de charges équivalente

Écrivons l'équation de conservation de la charge :

$$\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

Il s'agit des densités de courant et de charges réels, dites « libres ».

Si on modélise la matière diélectrique par des densités fictives, alors celles-ci doivent aussi vérifier l'équation de conservation de la charge[5].

5. Cette équation est linéaire. Si les courants et charges vrais la vérifient, et que la somme des charges et courants vrais et fictifs doivent la réaliser, alors les charges et courants liés doivent, seuls, la vérifier.

Copyrighted material

• Si on suppose que la densité de courant volumique fictif $\vec{j_p} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ et une densité volumique ρ_p de charges nulle modélisent la matière diélectrique, alors l'équation de conservation de la charge s'écrirait :

$$\text{div}\,\vec{j_p} = \text{div}\,\frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\,\vec{P}) = 0.$$

Mais comme la polarisation peut être variable[1] et non uniforme[2], on aboutit à une absurdité : la supposition que la seule densité de courant volumique $\vec{j_p} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$ modélise la matière diélectrique est fausse.

1. La dérivée par rapport au temps est alors non nulle.

2. La divergence est généralement non nulle.

• La présence dans ce modèle d'une densité volumique de charges ρ_p est donc nécessaire. L'équation de conservation de la charge s'écrit alors :

$$\text{div}\,\vec{j_p} + \frac{\partial \rho_p}{\partial t} = 0, \text{ soit } \frac{\partial}{\partial t}(\text{div}\,\vec{P} + \rho_p) = 0,$$

en tout point de la matière diélectrique et à tout instant. On en déduit :

$$\rho_p = -\,\text{div}\,\vec{P}^{3}.$$

3. On aurait dû avoir : $\rho_p = -\,\text{div}\,\vec{P}$ + Cte en intégrant l'équation. Mais en remarquant qu'un milieu non polaire ($\vec{P} = \vec{0}$) ne se charge pas ($\rho_p = 0$) en présence d'un champ extérieur, il vient naturellement : Cte = 0.

Définition 7

La matière diélectrique polarisée peut être considérée comme du vide siège d'une densité volumique de charges fictives[4]. On parle de **charges liées**, par opposition aux charges véritables, dites libres. Cette **densité de charges liées** présente en tout point de la matière diélectrique polarisée s'écrit :

$$\rho_p = -\,\text{div}\,\vec{P}^{5},$$

avec $\vec{P}$ vecteur polarisation.

4. Il ne s'agit pas de charges « vraies », car les hypothèses de l'étude sont celles d'un isolant non chargé. Les charges sont donc fictives. Elles constituent la seconde partie de l'un des modèles de la matière diélectrique.

5. On peut aussi démontrer directement cette expression à partir du potentiel créé par les dipôles, mais cette démonstration est hors programme.

B.5. Modélisation d'un diélectrique

En reprenant le contenu des paragraphes précédents, on conclut :

Un volume τ de matière diélectrique polarisée peut être modélisé[6] par du vide dans lequel on a placé une densité de courant volumique $\vec{j_p}$ et une densité volumique de charges ρ_p telles que :

$$\vec{j_p} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}\ ,\ \rho_p = -\,\text{div}\,\vec{P}.$$

6. C'est-à-dire remplacé.

Nous verrons dans la suite que cette modélisation n'est pas la seule possible pour traiter l'électromagnétisme dans la matière diélectrique.

C. Les équations de Maxwell[7]

7. James Clerc Maxwell (1831-1879) trouva en 1865 la cohérence qui n'existait pas encore entre toutes les lois de l'électromagnétisme en posant les équations qui portent son nom. La vérification de sa théorie sera apportée par Hertz en 1888.

Dans tout l'ouvrage, l'étude sera faite dans des milieux non magnétiques, c'est-à-dire de perméabilité magnétique égale à celle du vide μ_0[8].

8. Dans des milieux ferromagnétiques (les aimants par exemple), la perméabilité magnétique peut atteindre mille fois la valeur de μ_0. Un TP-cours « ferromagnétisme » traitera de ces milieux magnétiques dans la filière PSI.

C.1. Le champ électromagnétique.

En tout point M de l'espace, le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ est créé par la réunion sur l'ensemble des points P de l'espace des densité volumique de charges $\rho(P)$ et densité de courant volumique $\vec{j}(P)$.

Copyrighted material

Une particule de charge q passant en ce point M subit de la part des champs[1] la force de Lorentz, vue en première année :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Les équations de Maxwell régissent le champ électromagnétique créé par ces distributions en tout point de l'espace.

La connaissance de ces distributions rend donc possible la détermination des deux composantes $\vec{E}$ et $\vec{B}$ du champ électromagnétique, via l'utilisation des équations de Maxwell.

Ces équations sont locales et relient chaque champ à ses causes, mais aussi les champs entre eux[2].

1. On peut donc dire que cette force vient des densités de charges et de courant qui ont créé le champ.

2. On pourra donc interpréter cela par le fait qu'un champ peut être source de l'autre.

C.2. Équations de Maxwell dans le vide

En l'absence de matière autre que les charges et courants qui constituent les sources du champ électromagnétique, les quatre équations de Maxwell s'écrivent :

Propriété 2

$\mathbf{div}\vec{B} = 0$	**équation de Maxwell-flux**
$\mathbf{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$	**équation de Maxwell-Gauss**
$\mathbf{\overrightarrow{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$	**équation de Maxwell-Faraday**
$\mathbf{\overrightarrow{rot}}\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$	**équation de Maxwell-Ampère**

Ce sont des équations locales, valables en tout point ne possédant pas de propriété matérielle particulière[3].

On constate la présence de dérivées spatiales (opérateurs divergence ou rotationnel) et temporelle. On peut se placer en un point fixe et étudier les variations du champ électromagnétique dans le temps, ou bien prendre « une photo instantanée » de l'état du champ électromagnétique à une date fixée pour étudier ses variations en fonction des coordonnées d'espace. Les variables d'espace et de temps sont donc ici indépendantes[4], et on pourra intervertir l'ordre d'intégrations ou de dérivations lorsqu'elles concernent des variables indépendantes.

L'interprétation physique de ces équations permet de comprendre quelles sont les causes (membre de droite) de l'existence d'un champ (membre de gauche).

• L'**équation de Maxwell-flux** indique simplement que le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif.

• Avec l'**équation de Maxwell-Gauss**, on constate que les charges électriques fixes (densité volumique ρ) sont source du champ électrique $\vec{E}$.

• Avec celle de **Maxwell-Faraday**, on voit que les variations temporelles du champ magnétique $\vec{B}$ sont nécessairement liées à la présence d'un champ électrique $\vec{E}$.

• On retrouve le lien entre le champ magnétique et ses sources dans l'équation de **Maxwell-Ampère** : la présence du champ magnétique $\vec{B}$ est due à l'existence de courants électriques (densité $\vec{j}$) et à la dépendance au temps du champ électrique $\vec{E}$.

3. Ces équations seront valables dans le vide et dans certains métaux et gaz sous certaines conditions. Concernant les diélectriques, ceux-ci possèdent des propriétés matérielles qui lui confèrent une modélisation particulière.

4. Ce n'est pas le cas dans le cadre de la mécanique du point matériel, car les coordonnées du point étudié dépendent du temps : les variables d'espace et de temps sont alors liées.

Copyrighted material

1. En régime variable, on les dit couplés car ils ne peuvent généralement pas exister l'un sans l'autre.

Plus généralement, on constate que lorsque les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ dépendent du temps, ils sont présents ensemble dans deux des équations de Maxwell[1].

L'équation de **Maxwell-Ampère** peut être réécrite de la manière suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_D), \text{ avec } \vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Définition 8

On appelle **densité de courant volumique de déplacement** la quantité :

$$\vec{j}_D = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

$\vec{j}_D$ est homogène à une densité de courant volumique ($A \cdot m^{-2}$).

Les variations temporelles du champ électrique $\vec{E}$ sont donc source de champ magnétique, au même titre que les courants « vrais ».

C.3. Équations de Maxwell dans un diélectrique

On va modéliser le milieu diélectrique par du vide dans lequel ont été introduites les densités de charges $\rho_p = -\,\text{div}\vec{P}$ et de courant $\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$.

Les équations de Maxwell s'écrivent alors :

- Équation de Maxwell-flux : $\text{div}\vec{B} = 0$,
- Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho + \rho_p}{\varepsilon_0}$,
- Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,
- Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \vec{j}_p) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Seules les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Ampère sont modifiées. Si l'on fait intervenir le vecteur polarisation $\vec{P}$, elles deviennent :

- Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho + \text{div}\vec{P}}{\varepsilon_0}$,
- Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0(\vec{j} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}) + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$,

soit :

$$\text{div}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}) = \rho \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P})\right).$$

Définition 9

On définit le **vecteur déplacement électrique**[2] $\vec{D}$ par :

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}.$$

Les équations de Maxwell prennent alors la forme[3] :

Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\vec{D} = \rho$,

Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)$.

2. Ce vecteur est parfois appelé vecteur induction électrique.

3. Cette même forme s'applique au vide et aux diélectriques, mais pas à la matière aimantée.

C.4. Susceptibilité et permittivité diélectriques

On a vu que le phénomène de polarisation[4] consiste en l'apparition dans la matière diélectrique plongée dans un champ électrique extérieur $\vec{E}$ d'un moment dipolaire résultant. Les vecteurs polarisation $\vec{P}$[5] et champ appliqué $\vec{E}$ sont colinéaires et ont même orientation.

4. On parle de polarisation dès lors que vecteur polarisation est non nul.

5. Le vecteur polarisation représente physiquement le moment dipolaire résultant qui est apparu dans l'unité de volume de matière.

Définition 10

On définit la **susceptibilité diélectrique** χ_e[1] du milieu à partir du coefficient de proportionnalité entre les vecteurs polarisation et champ électrique $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \chi_e \varepsilon_0 \vec{E}.$$

Lorsqu'un diélectrique est homogène et isotrope, on dit qu'il est linéaire ou parfait si sa susceptibilité diélectrique χ_e ne dépend pas du champ appliqué $\vec{E}$[2]. C'est alors une constante qui ne dépend que de la nature du milieu, et éventuellement de la température.

Le vecteur déplacement électrique est alors proportionnel au champ $\vec{E}$:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0 (1 + \chi_e) \vec{E}.$$

Définition 11

On définit alors, pour le diélectrique considéré, la **permittivité relative** $\varepsilon_r = (1 + \chi_e)$ par rapport au vide[3], et la **permittivité absolue** $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r = \varepsilon_0 (1 + \chi_e)$.

On unifie ainsi les notations dans le vide ou dans un diélectrique :

La relation $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ valable dans le vide devient $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ dans un diélectrique. Il vient alors une nouvelle modélisation de la matière diélectrique, ne tenant pas compte des densités de charges et de courants fictifs :

Propriété 3

Dans un milieu diélectrique, les équations de Maxwell s'écrivent:

Équation de Maxwell-flux : $\operatorname{div} \vec{B} = 0$,

Équation de Maxwell-Gauss : $\operatorname{div} \vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon}$,

Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$,

Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Pour modéliser la présence de la matière diélectrique en un point, il suffit donc d'écrire en ce point les équations de Maxwell dans le vide, en remplaçant la permittivité absolue du vide ε_0 par celle ε du diélectrique[4].

C.5. Équation de conservation de la charge

On propose une démonstration plus formelle de cette équation à partir des équations de Maxwell. L'avantage est une obtention rapide du résultat et l'inconvénient une interprétation physique rendue plus difficile.

On rappelle l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$[5].

Appliquons la divergence à chaque membre de cette égalité :

$$\operatorname{div} \overrightarrow{\operatorname{rot}}\, \vec{B} = \mu_0 \operatorname{div} \vec{j} + \mu_0 \operatorname{div} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mu_0 \left(\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) \right)$$[6].

1. Une étude plus complète du contenu physique de la susceptibilité diélectrique sera effectuée dans le cadre du cours de physique des ondes (électromagnétiques).

2. Lorsque la susceptibilité diélectrique χ_e du milieu dépend du champ appliqué $\vec{E}$, on parle de diélectrique non linéaire. L'étude de tels milieux est hors programme.

3. $\varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ est sans dimension, car définie par le rapport de deux grandeurs de même nature, d'où son nom de permittivité relative.

4. Dans le cadre des milieux diélectriques, le physicien peut ainsi choisir de raisonner à partir des charges et courant liés ou des équations de Maxwell avec la permittivité ε du diélectrique. Il choisit l'un ou l'autre des modèles, sans les considérer en même temps.

5. Cette équation est valable *a fortiori* dans le vide, en donnant au vecteur $\vec{D}$ son expression dans le vide $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

6. On a vu que l'ordre des dérivations par rapport à des variables indépendantes peut être interverti.

Copyrighted material

1. $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$, le produit scalaire de $\vec{\nabla}$ avec un vecteur qui lui est orthogonal est nul (*cf* chapitre 1).

Or $\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}) = 0$[1] et $\mathrm{div}\vec{D} = \rho$ (Maxwell-Gauss), il vient alors :

$$0 = \mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

On a ainsi retrouvé l'équation de conservation de la charge.

D. Formulation intégrale des équations de Maxwell[2]

2. On s'apercevra dans cette partie que le nom de chacune des équations de Maxwell est le même que celui de la propriété ou du théorème qui lui est associé.

Comme les équations de Maxwell sont locales et valables en tout point et à tout instant, elles peuvent être intégrées sur un volume ou une surface[3].

L'intégration doit être considérée physiquement, c'est-à-dire comme une addition d'une infinité de contributions, chacune étant infiniment petite.

D.1. Conservation du flux magnétique

L'équation de Maxwell-flux ($\mathrm{div}\vec{B} = 0$) est valable pour tous les régimes et pour tous les milieux. Le résultat sera donc tout à fait général.

Soient deux surfaces distinctes S_1 et S_2 s'appuyant sur un même contour Γ et S la surface fermée réunion des deux surfaces S_1 et S_2, délimitant ainsi un volume τ (fig. 9).

On oriente le contour Γ, les normales $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ des deux surfaces S_1 et S_2 conformément à la règle du tire bouchon et la normale sortante $\vec{n}$ de S.

Les flux ϕ_1 et ϕ_2 du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface S_1 et S_2 respectivement valent :

$$\phi_1 = \iint_{S_1} \vec{B}\cdot\vec{n}_1\,dS \quad \text{et} \quad \phi_2 = \oiint_{S_2} \vec{B}\cdot\vec{n}_2\,dS.$$

3. On cherchera à faire apparaître les formules de Stokes ou d'Ostrogradsky. On intègrera donc la divergence sur un volume et on calculera le flux du rotationnel à travers une surface ouverte.

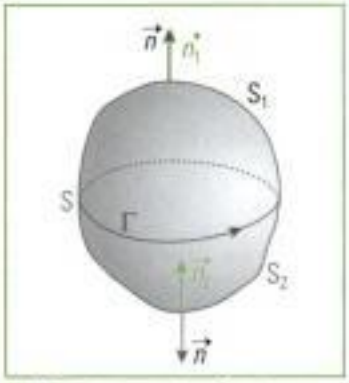


Fig. 9 - Surface S_1 et S_2 s'appuyant sur le même contour Γ.

Calculons la différence de ces deux flux :

$$\phi_1 - \phi_2 = \iint_{S_1} \vec{B}\cdot\vec{n}_1\,dS - \iint_{S_2} \vec{B}\cdot\vec{n}_2\,dS.$$

Or $\vec{n}_1 = \vec{n}$ sur S_1 et $\vec{n}_2 = -\vec{n}$ sur S_2. On obtient donc :

$$\phi_1 - \phi_2 = \iint_{S_1} \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS + \iint_{S_2} \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = \oiint_{S} \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS.$$

4. C'est l'équation locale de Maxwell-flux.

On applique maintenant la formule d'Ostrogradsky :

$$\phi_1 - \phi_2 = \oiint_{S} \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = \iiint_{\tau} \mathrm{div}\vec{B}\,d\tau = 0,$$

car $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ en tout point de τ[4].



Fig. 10 - Surface fermée S de normale sortante $\vec{n}$.

Propriété 4

Le flux magnétique à travers une surface fermée S est nul (fig.10) :

$$\oiint_{S} \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = 0.$$

On dit que **le champ magnétique $\vec{B}$ est à flux conservatif**. Le flux magnétique à travers une surface non fermée ne dépend que du contour Γ sur lequel s'appuie cette surface, sans dépendre de la surface elle-même[5].

5. C'est pour cela que l'on fait un abus de langage en parlant de « flux magnétique à travers un contour ».

C'est l'interprétation au niveau macroscopique de l'équation locale de Maxwell-Flux.

Copyrighted material

D.2. Théorème de Gauss

L'équation locale de Maxwell-Gauss ($\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$) est identique en régime variable ou en statique. Le théorème de Gauss qui en découle a donc un caractère universel. Mais en présence de matière diélectrique, il faut le réécrire avec le déplacement électrique[1]. On le démontre ici dans le vide, en calculant le flux du champ électrique à travers une surface fermée S quelconque. Cette surface délimite un volume τ.

En utilisant la formule d'Ostrogradsky, on a :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \text{div}\vec{E}\, d\tau,$$

et avec l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, il vient :

1. L'étude de l'électrostatique dans les diélectriques est hors programme.

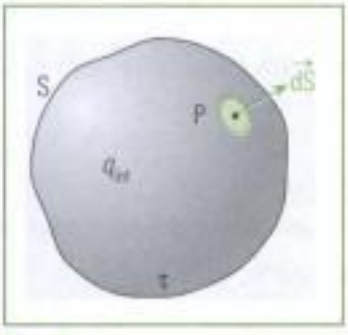


Fig. 11 - Surface fermée S contenant une charge totale q_{int}.

Théorème 1

Théorème de Gauss

Pour toute surface fermée S délimitant un volume τ (fig. 11), le champ électrique $\vec{E}$ vérifie dans le vide :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \text{div}\vec{E}\, d\tau = \iiint_\tau \frac{\rho}{\varepsilon_0}\, d\tau = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0},$$

avec q_{int} la charge contenue dans le volume τ.

L'équation de Maxwell-Gauss est l'expression locale de ce théorème.

D.3. Loi de Faraday

L'équation de Maxwell-Faraday ($\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) est valable pour tous les régimes et pour tous les milieux. Le résultat sera donc tout à fait général.

Considérons un contour Γ sur lequel s'appuie une surface S (fig. 12). On calcule la circulation du champ électrique le long du contour Γ :

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = e.$$

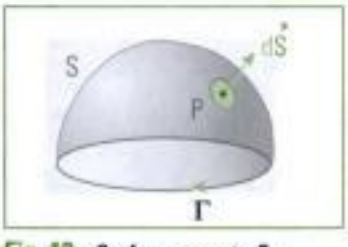


Fig. 12 - Surface ouverte S.

e est appelé la force électromotrice (f.e.m.) d'induction et correspond à la différence de potentiel[2] qui apparaît dans le contour. Appliquons la formule de Stokes, puis servons-nous de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$e = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}\cdot d\vec{S} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi}{dt},$$

expression dans laquelle ϕ désigne le flux magnétique à travers S.

2. Pour se convaincre que e a bien la dimension d'une différence de potentiel, on peut se remémorer la formule infinitésimale donnant la différentielle du potentiel V en électrostatique: $\vec{E}\cdot d\vec{l} = -dV$.

Loi 1

Loi de Faraday

$$e = -\frac{d\phi}{dt},$$

où e désigne la force électromotrice d'induction traversant un circuit fermé Γ et ϕ le flux magnétique à travers ce même circuit Γ.

Cette loi est le pilier de l'induction électromagnétique, qui stipule que les variations temporelles du flux magnétique à travers un circuit induisent l'apparition d'une force électromotrice qui engendre dans un circuit fermé des courants appelés courants induits[3]. L'équation de Maxwell-Faraday en est la traduction locale.

3. On peut remarquer que la loi de Faraday est respectée en électrostatique car on a :

$e = \oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma -\overrightarrow{\text{grad}}V\cdot d\vec{l}$

$= \oint_\Gamma -dV = 0$

(car Γ est fermé) et $\frac{d\phi}{dt} = 0$ (car on est en régime permanent).

Copyrighted material

D.4. Théorème d'Ampère généralisé



Fig. 13 - Surface ouverte S.

On calcule le flux de chacun des membres de l'équation de Maxwell-Ampère ($\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$) à travers une surface S non fermée s'appuyant sur un contour Γ (fig. 13).

Comme nous utilisons l'équation dans le vide pour un régime quelconque, le résultat n'est *a priori* valable que dans le vide.

L'intégration sur la surface S de l'égalité fournit :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S \left(\mu_0 \vec{j} + \varepsilon\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)\cdot d\vec{S} = \mu_0\left(\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} + \iint_S \vec{j}_D\cdot d\vec{S}\right)^{1}.$$

Pour le membre de gauche, on applique la formule de Stokes :

$$\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}\cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l}.$$

Dans le membre de droite, on reconnaît l'expression de l'intensité du courant qui traverse la surface S dans le sens choisi pour sa normale[2] :

$$\iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = I \quad \text{et} \quad \iint_S \vec{j}_D\cdot d\vec{S} = I_D,$$

où I est l'intensité du courant « vrai » et I_D celle du courant de déplacement[3].

Il vient donc, compte tenu de ces résultats intermédiaires :

Théorème 2

Théorème d'Ampère généralisé

Le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers un contour fermé Γ est égal à la somme des intensités traversant Γ :

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = I + I_D,$$

où I est l'intensité du courant « vrai » et I_D celle du courant de déplacement à travers le contour fermé Γ.

Ce théorème montre que les sources du champ magnétique $\vec{B}$ sont les courants électriques « vrais » et ceux de déplacement, ces derniers résultant des variations temporelles du champ électrique[4].

1. En écrivant la densité de courant de déplacement sans expliciter son contenu, on élargit la démonstration aux milieux diélectriques pour lesquels on aura $\vec{j}_0 = \varepsilon \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ à la place de $\vec{j}_0 = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ pour le vide.

2. Une telle intensité peut être positive ou négative suivant l'orientation de la normale de S.

3. On rappelle que le courant de déplacement est un courant fictif qui traduit une équivalence avec les variations temporelles du champ électrique.

4. En régime statique (indépendant du temps), $I_D = 0$ et on retrouve l'expression du théorème d'Ampère vue en première année.

E. Étude des potentiels

E.1. Potentiel vecteur

L'équation de Maxwell-flux s'écrit $\text{div}\vec{B} = 0$, soit avec la notation nabla[5] :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0.$$

On en déduit que le champ magnétique $\vec{B}$ reste orthogonal au vecteur nabla $\vec{\nabla}$ en tout point. D'après la propriété 8 du premier chapitre, il existe un champ de vecteurs $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ en tout point, soit $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$.

Propriété 5

Le champ magnétique $\vec{B}$ dérive d'un **potentiel vecteur** $\vec{A}$ tel que :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}.$$

5. L'opérateur $\vec{\nabla}$ a été défini au chapitre 1 §G.

Copyrighted material

Le potentiel vecteur n'est pas unique.

En effet, considérons le vecteur $\vec{A}' = \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}}\,U$, $\vec{A}$ étant le potentiel vecteur du champ $\vec{B}$ et U un champ de scalaires quelconque.

Calculons le rotationnel de ce vecteur :

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}' = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} + \overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,U) = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$, car $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{grad}}\,U) = \vec{\nabla} \wedge \vec{\nabla}U = 0$[1].

Donc $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}' = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{B}$ et $\vec{A}'$ est aussi un potentiel vecteur du champ $\vec{B}$.

1. On effectue le produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires.

E.2. Potentiel scalaire

Réécrivons maintenant l'équation de Maxwell-Faraday en tenant compte du potentiel vecteur $\vec{A}$ du champ magnétique $\vec{B}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}),$$

$$\text{soit } \overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}, \text{ ou } \vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}.$$

On en déduit que le vecteur $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ reste colinéaire au vecteur nabla $\vec{\nabla}$ en tout point. D'après la propriété 7 du premier chapitre, il existe un champ de scalaires V tel que $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$ en tout point, soit :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Propriété 6

Le champ électrique $\vec{E}$ dérive d'un **potentiel scalaire** V tel que :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

Le potentiel scalaire V n'est pas unique.

En effet, considérons la nouvelle fonction scalaire $V' = V + f(t) + K$, où f est une fonction du temps seulement et K une constante. Calculons le gradient de cette nouvelle fonction V' :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,V' = \overrightarrow{\text{grad}}\,V + \overrightarrow{\text{grad}}\,f + \overrightarrow{\text{grad}}\,K = \overrightarrow{\text{grad}}\,V,$$

car la dérivée de la fonction f par rapport aux variables d'espace est nulle, tout comme celle de la constante K. Si V est un potentiel scalaire, alors V' l'est aussi : le potentiel scalaire n'est pas unique.

L'unicité du couple $(\vec{A}, V)$ est réalisée si l'on impose une équation supplémentaire entre $\vec{A}$ et V : c'est la **condition de Jauge**. On travaillera alors avec la **Jauge dite de Lorentz** :

$$\text{div}\,\vec{A} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial V}{\partial t} = 0$$[2].

2. L'étude des conditions de Jauge est hors programme.

F. Étude de la statique

On va s'intéresser dans cette partie aux régimes stationnaires, c'est-à-dire indépendants du temps. Les sources et champs associés ne dépendent pas de la variable « temps t ».

Pour cette étude, on se placera dans le vide[3].

3. Lorsque des charges ou courants seront présents, les constantes de la matière resteront celles du vide : permittivité absolue ε_0 et perméabilité absolue μ_0.

Copyrighted material

F.1. Équations de Maxwell

On reprend les équations de Maxwell dans le vide, en annulant les dérivées par rapport au temps :

Équation de Maxwell-flux : $\text{div}\vec{B} = 0$,

Équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$,

Équation de Maxwell-Faraday : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = 0$,

Équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$.

Les champs sont maintenant découplés. Le champ électrique $\vec{E}$ apparaît seul dans les équations de Maxwell-Gauss et Maxwell-Faraday, tandis que le champ magnétique $\vec{B}$ ne figure que dans les équations de Maxwell-Flux et Maxwell-Ampère.

L'étude de l'électrostatique et celle de la magnétostatique sont donc indépendantes et chacun des deux champs peut exister en l'absence de l'autre.

F.2. Équations de Poisson

Ce sont les équations aux dérivées partielles satisfaites par chacun des potentiels. En régime stationnaire, les potentiels sont définis par :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} \quad \text{et} \quad \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V.$$

L'équation de Maxwell-Faraday conduit à $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V$, et en introduisant cette expression dans l'équation de Maxwell-Gauss, il vient :

$\text{div}(-\overrightarrow{\text{grad}}V) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, soit :

Propriété 7

Équation de Poisson du potentiel électrique

En tout point, le potentiel électrique V vérifie :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0^{1}.$$

1. C'est l'équation qui relie le potentiel électrostatique à ses sources.

En un point où il n'y a pas de charges[2], on a :

$$\Delta V = 0 \text{ (\textbf{équation de Laplace})}.$$

2. Ce n'est pas parce qu'il n'y a pas de charge en un point que le potentiel y est nul. Les charges qui le créent peuvent se trouver ailleurs.

De manière analogue, l'équation de Maxwell-Flux amène $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \mu_0 \vec{j}, \text{ soit : } \overrightarrow{\text{grad}}\,\text{div}\vec{A} - \Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j}.$$

La condition de Jauge s'écrivant en statique $\text{div}\vec{A} = 0$, on obtient :

Propriété 8

Équation de Poisson du potentiel vecteur

En tout point, le potentiel vecteur $\vec{A}$ vérifie :

$$\Delta\vec{A} + \mu_0 \vec{j} = \vec{0}^{3}.$$

3. En considérant les coordonnées cartésiennes, chacune de ses composantes satisfait la même équation de Poisson que le potentiel scalaire. Voir pour cela l'écriture du laplacien dans le chapitre 1.

Copyrighted material

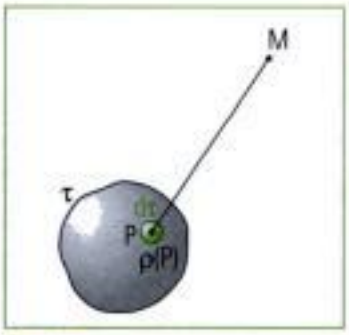


Fig. 14 - Sources du potentiel en M.

1. On retrouve l'expression du potentiel vue en première année, mais obtenue à partir des équations de Maxwell.

2. Il suffit de remplacer $\frac{1}{\varepsilon_0}$ par μ_0 pour avoir la même équation.

3. Ce résultat peut être généralisé. Lorsque les courants sont tournants (en utilisant par exemple les coordonnées cylindriques), on constate que le potentiel vecteur a des lignes de champ tournantes aussi.



Fig. 15 - Sources du champ électrique en M.

4. On prend le gradient en M après avoir sommé sur les points P, la dérivée ne peut donc s'appliquer sur les coordonnées de P. Le calcul est réalisable mais n'a pas d'intérêt physique. Il n'est donc pas détaillé.

F.3. Solution des équations de Poisson

La résolution de l'équation de Poisson est mathématiquement compliquée. On admet le résultat suivant :

Propriété 9

Le potentiel V(M) solution de l'équation locale $\Delta V(M) + \frac{\rho(M)}{\varepsilon_0} = 0$ s'écrit en fonction de ses sources se trouvant aux points P d'un volume τ (fig. 14) :

$$V(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{P\in\tau} \frac{\rho(P)}{PM}\, d\tau^{1}.$$

De manière analogue, les composantes selon les directions Ox, Oy et Oz du potentiel vecteur $\vec{A}$ vérifient les équations de Poisson :

$\Delta A_x + \mu_0 j_x = 0$, $\Delta A_y + \mu_0 j_y = 0$, $\Delta A_z + \mu_0 j_z = 0$.

Les solutions s'écrivent de manière analogue[2] :

$$A_x(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P\in\tau} \frac{j_x(P)}{PM}\, d\tau,\ A_y(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P\in\tau} \frac{j_y(P)}{PM}\, d\tau,$$

et $A_z(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P\in\tau} \frac{j_z(P)}{PM}\, d\tau$, soit une expression globale :

Loi 2

Loi de Biot et Savart pour le potentiel vecteur

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ créé en un point M par une distribution de courant volumique se trouvant aux points P d'un volume τ s'écrit :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P\in\tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM}\, d\tau.$$

On constate que si les courants gardent une direction fixe ($\vec{j}$ est dirigé par le même vecteur unitaire pour tous les points P de l'espace), alors le potentiel vecteur $\vec{A}$ possède cette direction : il est colinéaire à ses sources[3].

F.4. Obtention des champs

Au point M où le champ existe, les relations entre champs et potentiels font intervenir les opérateurs gradient et rotationnel. La dérivée spatiale est effectuée par rapport aux coordonnées du point M. C'est en effet autour de M que le champ est calculé et peut éventuellement varier.

En appliquant la relation $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}_M V$, on retrouve la **loi de Coulomb** (fig. 15) :

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{P\in\tau} \frac{\rho(P)\overrightarrow{PM}}{PM^3}\, d\tau = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_{P\in\tau} \frac{\rho(P)\vec{u}_{PM}}{PM^2}\, d\tau^{4},$$

avec $\vec{u}_{PM}$ le vecteur unitaire porté par le vecteur $\overrightarrow{PM}$.

L'ensemble des propriétés du champ électrostatique est donc contenu dans les deux seules équations locales de Maxwell dans lesquelles il apparaît.

Copyrighted material

De manière analogue, le champ magnétique est obtenu grâce à la relation $\vec{B} = \overrightarrow{rot}_M \vec{A}$ et permet de retrouver l'expression :

Loi 3

Loi de Biot et Savart pour le champ magnétique

Le champ magnétique $\vec{B}$ créé en un point M par une distribution de courant volumique se trouvant aux points P d'un volume τ s'écrit :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P\in\tau} \frac{\vec{j}(P) \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2} d\tau.$$

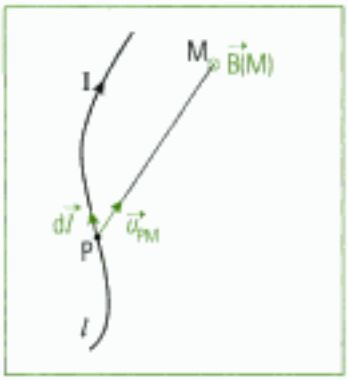


Fig. 16 - Sources du champ magnétique en M.

On peut simplifier cette intégrale dans le cas de courants filiformes (le conducteur filiforme est orienté dans le sens du courant I (fig. 16)) :

$$\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{P\in l} \frac{d\vec{l} \wedge \vec{u}_{PM}}{PM^2}.$$

L'ensemble des propriétés du champ magnétique est donc contenu dans les deux seules équations locales de Maxwell dans lesquelles il est présent.

G. Relations de passage du champ électromagnétique

Dans les équations de Maxwell n'apparaissent que des densités de charges ou de courants réparties dans un volume. Lorsque le modèle des sources du champ impose que ces charges ou courants ne soient présents que sur des surfaces, on ne peut plus appliquer les équations de Maxwell[1].

Les champs subissent alors des discontinuités à leur traversée. Ils ne sont donc plus dérivables et les équations de Maxwell doivent être remplacées par des relations dites « de passage » qui expriment la discontinuité du champ électromagnétique à la traversée d'une surface chargée avec une densité superficielle σ ou parcourue par un courant de densité $\vec{j}_S$.

On se limitera, dans cette étude, au vide ou aux milieux qui possèdent les mêmes constantes matérielles ε_0 et μ_0 que le vide[2].

On considère une surface S séparant deux demi-espaces ❶ et ❷ qui peut être chargée ou parcourue par un courant (fig. 17). On s'intéresse à un point M de cette surface, et aux deux points M_1 et M_2 de part et d'autre de la surface, proches de M et disposés sur la normale $z'z$ à la surface en M orientée de M_1 vers M_2. On appelle $\vec{n}_{1\to2}$ le vecteur unitaire porté par la droite $z'z$ et de même sens. L'objectif est de faire tendre M_1 et M_2 vers M pour les assimiler au point M : on met alors en évidence la discontinuité du champ lors de la traversée de la surface au point M.

Les indices N et T désigneront respectivement la composante normale et une composante tangentielle quelconque d'un vecteur à la surface.

1. On a vu en première année la difficulté pour écrire les champs sur une surface chargée ou parcourue par un courant.

2. On exclut donc de l'étude, conformément au programme, les milieux diélectriques.

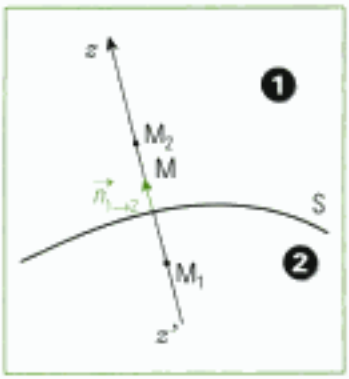


Fig. 18 - Les deux demi-espaces ❶ et ❷ séparés par la surfaces S.

G.1. Champ électrique

G.1.1. Composante normale

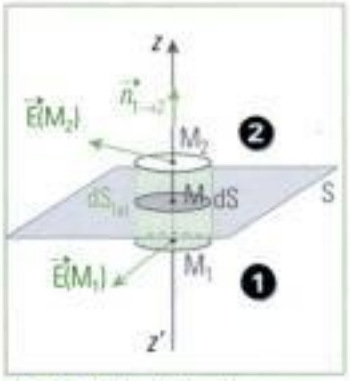


Fig. 18 - Élément de volume autour du point M ∈ S.

1. La sommation ne contient que trois termes, chacun étant un infiniment petit.

2. Le champ électrique ne peut jamais être infini car ceci signifierait une force de Coulomb infinie (voir 1re année).

On imagine un élément de surface dS de la surface S, et on construit une surface fermée Σ cylindrique de génératrice $z'z$ et de base dS centrée sur M. M_1 et M_2 sont les centres des bases du cylindre Σ (fig. 18).

On va utiliser la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss. Tout d'abord, on calcule le flux du champ électrique à travers la surface fermée Σ considérée :

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \vec{E}(M_1)\cdot(-\vec{n}_{1\to2}dS) + \vec{E}(M_2)\cdot(\vec{n}_{1\to2}dS) + \iint_{dS_{lat}} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{lat}\ ^{1}.$$

Lorsque l'on fait tendre la hauteur du cylindre vers 0 ($M_1 \to M$ *et* $M_2 \to M$), la surface latérale du cylindre dS_{lat} tend vers 0 et, comme $\|\vec{E}\|$ reste fini[2], l'intégrale $\iint_{dS_{lat}} \vec{E}\cdot d\vec{S}_{lat}$ tend vers 0.

Le flux devient donc :

$$\phi = [\vec{E}(M_2) - \vec{E}(M_1)]\cdot\vec{n}_{1\to2}dS.$$

En vertu du théorème de Gauss, ce flux vaut :

$$\phi = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma dS}{\varepsilon_0},$$

et on obtient finalement, au voisinage immédiat du point M :

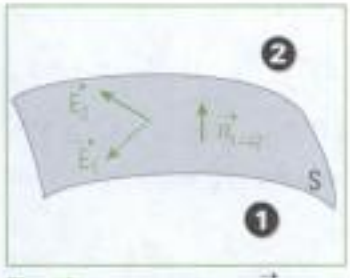


Fig. 19 - Discontinuité de $\vec{E}_N$ à la traversée d'une surface chargée.

3. $\vec{E}_1(M) = \lim_{M_1\to M} \vec{E}_1(M_1)$ *et* $\vec{E}_2(M) = \lim_{M_2\to M} \vec{E}_2(M_2)$.

4. Les cotés sont alors tangentiels à la surface S.

Propriété 10

Discontinuité de la composante normale du champ électrique (fig. 19)

$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1]\cdot\vec{n}_{1\to2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\ ^{3}, \text{ ou bien}$$

$$\vec{E}_{2N} - \vec{E}_{1N} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to2}.$$

C'est donc la condition de passage pour la composante normale du champ électrique lors de la traversée d'une surface chargée. La composante normale du champ électrique subit alors une discontinuité.

G.1.2. Composante tangentielle

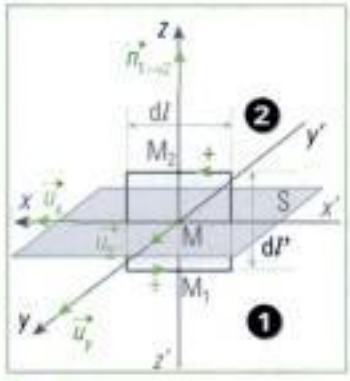


Fig. 20 - Élément de surface autour du point M ∈ S.

5. La circulation le long des deux cotés perpendiculaires à la surface S est nulle, puisque ceux-ci ont une longueur qui s'annule, ||E|| restant fini.

On imagine dorénavant un contour Γ élémentaire rectangulaire autour du point M, dont les côtés sont soit parallèles à la normale $\vec{n}_{1\to2}$ à la surface S, soit perpendiculaires[4] à cette normale, et ont pour dimensions respectives dl' et dl (fig. 20). Ce contour Γ délimite une surface Σ' entourant le point M.

On appelle $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire dirigé dans la direction $x'x$ des cotés tangentiels à la surface S.

On va utiliser la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday. On calcule alors la circulation C du champ électrique le long de ce contour Γ, en faisant tendre dl' vers zéro :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \vec{E}(M_1)\cdot(-\vec{u}_x dl) + \vec{E}(M_2)\cdot(\vec{u}_x dl)\ ^{5}.$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a aussi:

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{E}\cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma'} \overrightarrow{rot}\,\vec{E}\cdot d\vec{\Sigma}' = -\iint_{\Sigma'} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{\Sigma}' = 0,$$

Copyrighted material

1. On admet que $\left\| \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right\|$ reste fini.

car la surface Σ' du contour devient nulle lorsque la dimension de l'un de ses côtés devient nulle[1].

Finalement, avec les mêmes notations que précédemment, on obtient $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\cdot\vec{u}_x = 0$. Comme ce raisonnement est valable pour tout vecteur $\vec{u}_x$ tangent à la surface S, on obtient la propriété suivante :

Propriété 11

Conservation de la composante tangentielle du champ électrique

$$[\vec{E}_2 - \vec{E}_1] \wedge \vec{n}_{1\to 2} = \vec{0}, \text{ ou}$$

$$\vec{E}_{T1} = \vec{E}_{T2}.$$

On parle de conservation de la composante tangentielle du champ électrique à la traversée de toute surface, chargée ou non.

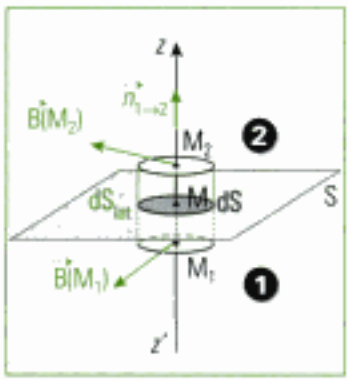


Fig. 21 - Élément de volume autour du point M ∈ S.

2. On sait que le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est nul (*cf* D.1).

3. Le champ magnétique ne peut jamais être infini car ceci signifierait une force de Laplace infinie (voir 1re année).

G.2. Champ magnétique

G.2.1. Composante normale

On reprend la surface Σ fermée imaginée dans le paragraphe G.1.1 (fig. 21), à travers laquelle on calcule le flux du champ magnétique.

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{B}\cdot d\vec{S} = \vec{B}(M_1)\cdot(-\vec{n}_{1\to 2}dS) + \vec{B}(M_2)\cdot(\vec{n}_{1\to 2}dS) + \iint_{dS_{lat}} \vec{B}\cdot d\vec{S}_{lat} = 0^{2}.$$

Lorsque l'on fait tendre la hauteur du cylindre vers 0 ($M_1 \to M$ *et* $M_2 \to M$), la surface latérale dS_{lat} du cylindre tend vers 0 et, comme $\|\vec{B}\|$ reste fini[3], l'intégrale $\iint_{dS_{lat}} \vec{B}\cdot d\vec{S}_{lat}$ tend vers 0.

On obtient finalement, au voisinage immédiat du point M, la propriété suivante :

Propriété 12

Conservation de la composante normale du champ magnétique

$$[\vec{B}_2 - \vec{B}_1]\cdot\vec{n}_{1\to 2} = 0, \text{ ou bien}$$

$$\vec{B}_{2N} = \vec{B}_{1N}.$$

On dit que la composante normale du champ magnétique reste conservée lors de la traversée de toute surface.

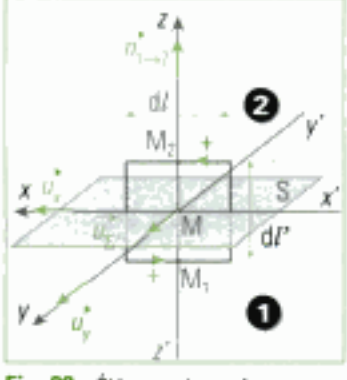


Fig. 22 - Élément de surface autour du point M ∈ S.

4. Les cotés sont alors tangentiels à la surface S.

5. La circulation le long des deux autres cotés est nulle, puisque ceux-ci ont une longueur qui s'annule, $\|\vec{B}\|$ restant fini.

G.2.2. Composante tangentielle

On imagine le même contour élémentaire Γ rectangulaire autour du point M qu'au paragraphe G.1.2 (fig. 22). Les cotés sont soit parallèles à la normale à la surface S, soit perpendiculaires[4] à cette normale, et ont pour dimensions respectives dl' et dl.

On appelle $\vec{u}_x$ le vecteur unitaire dirigé dans la direction $x'x$ des cotés tangentiels.

On va utiliser la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-flux. On calcule alors la circulation C du champ magnétique le long de ce contour, en faisant tendre dl' vers zéro :

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{B}\cdot d\vec{l} = \vec{B}(M_1)\cdot(-\vec{u}_x\,dl) + \vec{B}(M_2)\cdot(\vec{u}_x\,dl)^{5}.$$

Copyrighted material

En utilisant l'équation de Maxwell-Ampère, on a :

$$C = \oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \iint_{\Sigma'} \overrightarrow{rot}\,\vec{B}\cdot d\vec{\Sigma'},$$

$$C = \iint_{\Sigma'} \mu_0 \vec{j}\cdot d\vec{\Sigma'} + \iint_{\Sigma'} \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{\Sigma'}.$$

On annule progressivement dl' : la surface Σ' du contour devient nulle car la dimension de l'un de ses cotés devient nulle, et le flux $\iint_{\Sigma'} \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{\Sigma'}$ s'annule aussi[1].

1. On admet que $\left\| \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right\|$ reste fini.

En revanche, si la surface S est parcourue par des courants de surface de densité $\vec{j_S}$, alors l'intensité dI du courant qui traverse la surface Σ' ne s'annule pas, elle vaut alors :

$$\iint_{\Sigma'} \vec{j}\cdot d\vec{\Sigma'} = dI = \vec{j_S}\cdot\vec{u}_{\Sigma'}\, dl'^{[2]},$$

où $\vec{u}_{\Sigma'}$ désigne le vecteur unitaire normal à la surface Σ' et orienté conformément au sens positif choisi pour calculer la circulation.

2. Voir le paragraphe A.4 de ce même chapitre qui donne la définition des courants de surface.

Dans ce cas de figure, on a $\vec{u}_{\Sigma'} = \vec{u}_y$, et $dI = j_{sy}dl$.

On obtient :

$$(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\vec{u}_x dl = \mu_0 j_{sy} dl,$$

$$\Leftrightarrow [(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{u}_z]_y = \mu_0 j_{sy}.$$

Cette relation se généralise en :

Propriété 13

Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \wedge \vec{n}_{1\to 2} = \mu_0 \vec{j}_s.$$

C'est la condition de passage pour la composante tangentielle du champ magnétique lors de la traversée d'une surface parcourue par des courants de surface. La composante tangentielle du champ magnétique subit alors une discontinuité.

G.3. Conclusion

En première année, on a vu qu'il était difficile de définir chacun des champs électrique et magnétique sur une surface chargée ou parcourue par des courants de surface. La discontinuité du champ avait été expliquée qualitativement.

L'étude précédente exprime cette discontinuité de manière quantitative. Lors de la traversée d'une surface, les équations donnant les conditions de passage du champ électromagnétique remplacent les équations de Maxwell qui ne sont plus définies sur la surface[3].

3. Le champ électromagnétique admettant une discontinuité, les dérivées spatiales du champ ne sont dès lors plus définies.

Les conditions de passage sont donc des équations locales « de surface ».

La propriété 14 synthétise les relations de passage :

Propriété 14

Discontinuité du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ lors de la traversée d'une surface de caractéristiques $(\sigma, \vec{j_s})$

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n}_{1\to 2} \end{cases}$$

Copyrighted material

H. Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS)

H.1. Définition

Le champ électromagnétique mesuré en un point M à une date t a été créé par ses sources, les charges et les courants, présents en des points P généralement relativement lointains du point M d'observation.

Le champ électromagnétique est créé en P et se propage jusqu'au point M où il est mesuré[1].

La propagation du champ électromagnétique s'effectue à la vitesse $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ [2] dans le vide ou dans un conducteur. Le champ électromagnétique a besoin de la durée $t_{PM} = \frac{PM}{c}$, pour aller depuis son lieu de création P jusqu'au point M où on mesure son action. Les variations des sources du champ au point P ne sont donc pas ressenties immédiatement au point M, mais seulement après la durée $t_{PM} = \frac{PM}{c}$.

Définition 12

On appelle **approximation des états quasi-stationnaires** (ou **ARQS**) l'étude de l'électromagnétisme dans la limite où les temps de propagation peuvent être négligés.

Soit T une durée caractéristique des variations temporelles des densités de charges ou de courants (T est par exemple la période si les densités sont sinusoïdales), et en conséquence la période du champ électromagnétique. Soit D une distance correspondant à l'extension géométrique ou géographique typique du dispositif.

L'approximation des états quasi-stationnaires est donc valable lorsque :

$$\frac{PM}{c} \ll T, \text{ soit } D \ll cT.$$

On constate alors que le champ électromagnétique s'établit instantanément à notre échelle de mesure du temps.

En électricité, le circuit d'une habitation a une longueur dont l'ordre de grandeur est D = 30 m[3]. L'approximation des états quasi-stationnaires est valable si $T \gg \frac{D}{c}$, soit $T \gg 10^{-7}$ s, ou pour une fréquence correspondante $f = \frac{1}{T} \ll 10^7 \text{ Hz} = 10 \text{ MHz}$. Cela est toujours le cas pour les circuits électriques classiques[4].

H.2. Équations locales dans l'A.R.Q.S

On se place dans le vide, ou bien, lorsqu'il y a des charges ou des courants, dans un milieu matériel dont les permittivité et perméabilité absolues sont celles du vide, respectivement ε_0 et μ_0.

Soit D la distance caractéristique des variations du champ électromagnétique sur l'étendue du dispositif, et T une durée caractéristique de ses variations temporelles.

1. Cela peut être aussi au point où l'on en mesure les effets.

2. Le cours de physique des ondes de cette année en apporte la démonstration.

3. Aucun résultat précis n'est recherché, mais seulement une valeur correcte dans des variations d'un facteur 10 (grande tolérance).

4. Seuls les circuits hyperfréquences ne vérifient pas l'approximation des états quasi-stationnaires. Les antennes paraboliques, par exemple, fonctionnent avec des fréquences de quelques GHz et ne vérifient pas l'approximation des états quasi-stationnaires, les antennes de réception des ondes radio « FM » non plus, la fréquence étant de l'ordre de 100 MHz.

Copyrighted material

La dérivée du champ par rapport au temps revient, en ordre de grandeur, à diviser par sa durée caractéristique T de variation.

Si, par exemple, le champ électrique s'écrit $\vec{E} = E_0\cos(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}$, et a pour amplitude E_0, alors $\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = -\omega E_0 \sin(\omega t - kx + \varphi)\vec{u}$ a pour amplitude $\omega E_0 = 2\pi \dfrac{E_0}{T}$, soit $\dfrac{E_0}{T}$ en ordre de grandeur[1].

1. Aucun résultat précis n'est recherché, mais seulement une valeur correcte dans des variations d'un facteur 10 (grande tolérance).

De même, une dérivation par rapport aux coordonnées d'espace revient à diviser par la distance D caractéristique de l'étendue du dispositif sur lequel le champ varie.

H.2.1. Équations de Maxwell.

La démarche précédente nous permet d'évaluer l'ordre de grandeur de chaque terme des équations de Maxwell.

L'équation de Maxwell-Flux n'apporte rien.

L'équation de Maxwell-Gauss ($\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$) donne :

$$\frac{E}{D} \approx \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

Elle ne donne que le lien entre l'amplitude du champ électrique et celle de ses sources.

L'équation de Maxwell-Faraday ($\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$) donne :

$$\frac{E}{D} \approx \frac{B}{T}.$$

Cette relation indique ainsi le rapport des amplitudes des champs.

L'équation de Maxwell-Ampère s'écrit :

$$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Calculons les deux ordres de grandeur : $\left\|\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right\| = \dfrac{B}{D}$ et $\left\|\varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\| \approx \dfrac{1}{c^2}\dfrac{E}{T}$.

Le rapport de ces deux termes devient :

$$\frac{\left\|\varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right\|}{\left\|\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B}\right\|} = \frac{\dfrac{1}{c^2}\dfrac{E}{T}}{\dfrac{B}{D}} = \frac{D^2}{c^2T^2} << 1, \text{ car } D << cT.$$

Cela signifie que l'on peut négliger les courants de déplacement dans l'approximation des états quasi-stationnaires.

Propriété 15

Dans l'approximation des états quasi-stationnaires, les équations de Maxwell s'écrivent[2] :

Maxwell-flux	$\mathrm{div}\vec{B} = 0$
Maxwell-Gauss	$\mathrm{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$
Maxwell-Faraday	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
Maxwell-Ampère	$\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

2. On remarque la présence d'un terme de dérivée par rapport au temps : l'ARQS correspond aux régimes lentement variables dans le temps, et certainement pas aux régimes statiques.

Copyrighted material

H.2.2. Équation de conservation de la charge.

1. On rappelle que div(rot) = 0.

Si on prend la divergence de l'équation de Maxwell-Ampère dans l'approximation des états quasi-stationnaires[1], on obtient :

Propriété 16

Dans l'ARQS, l'**équation de conservation de la charge** s'écrit :

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0.$$

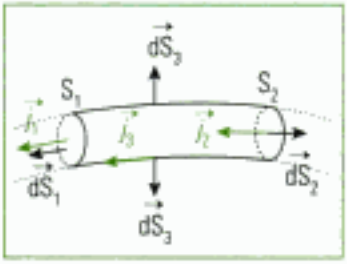


Fig. 23 - Fil électrique.

L'équation locale de conservation de la charge n'est compatible avec les équations de Maxwell dans l'approximation des états quasi-stationnaires que si $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ peut être négligé. La densité de courant a une divergence nulle, ce qui la rend à flux conservatif. Ainsi, **chaque portion de fil électrique est un tube de courant, l'intensité du courant à travers chacune des deux sections étant la même**. On étudie ainsi une surface cylindrique fermée S dont la hauteur est formée par la paroi d'un fil électrique et les bases par des sections S_1 et S_2 du fil (fig. 23). On a alors :

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{j}_1\cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_2\cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{j}_3\cdot d\vec{S}_3 = I_1 - I_2,$$

$$\text{et : } \oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \operatorname{div}\vec{j}\, d\tau = 0.$$

Il vient donc : $I_1 = I_2$.

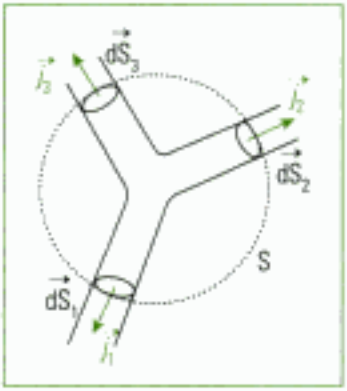


Fig. 24 - Nœud de courant.

On démontre de la même manière **la loi des mailles : la somme des intensités partant d'un nœud** (que l'on a entouré d'une surface fermée S) **est nulle**. Par le même raisonnement que précédemment (fig. 24), on obtient :

$$\oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{j}_1\cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{j}_2\cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{j}_3\cdot d\vec{S}_3 = I_1 + I_2 + I_3,$$

$$\text{et : } \oiint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \iiint_\tau \operatorname{div}\vec{j}\, d\tau = 0.$$

Il vient donc : $I_1 + I_2 + I_3 = 0$.

I. Effet de peau

I.1. Hypothèses

On se place dans un conducteur, dans lequel est supposé exister un champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. On ne prend pas en compte les sources de ce champ, que l'on considère comme suffisamment éloignées.

Le milieu conducteur est supposé posséder les mêmes constantes que celles du vide : permittivité absolue ε_0 et perméabilité absolue μ_0.

Propriété 17

La relation caractérisant un milieu conducteur est la **loi d'Ohm locale** :

$$\vec{j} = \gamma\vec{E},$$

où $\vec{j}$ désigne la densité de courant volumique qui apparaît en présence du champ électrique $\vec{E}$ et γ une constante appelée **conductivité du milieu** (en $S\cdot m^{-1}$)[2].

2. On note l'analogie entre le nom du milieu « conducteur » et celui de sa constante constitutive « conductivité ».

1. La conductivité peut dépendre de la fréquence en très haute fréquence (domaine de transparence UV), mais une telle étude est hors programme.

2. En électromagnétisme, on n'étudie pas les effets de la température, que l'on suppose invariable.

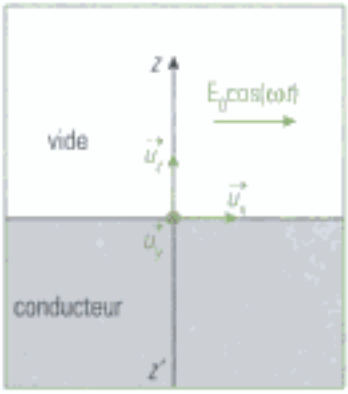


Fig. 25 - Champ électrique $\vec{E}$ sinusoïdal dans le vide ($z > 0$).

3. Mais suffisamment lentement variable pour que l'ARQS reste vérifiée.

On suppose que la conductivité γ est une constante réelle dont la valeur[1] ne dépend que du milieu et de la température[2].

Comme des courants volumiques sont présents, les courants surfaciques seront absents de notre problème.

On suppose aussi que l'étude est effectuée dans le cadre de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

Le milieu conducteur occupe le demi-espace $z < 0$. Un champ électrique uniforme et sinusoïdal du temps règne dans l'autre demi-espace vide $z > 0$ (fig. 25) :

$$\vec{E}(x, y, z > 0, t) = E_0\cos(\omega t)\vec{u}_x.$$

Le but de ce paragraphe est de déterminer l'évolution du champ électromagnétique dans la matière conductrice, en régime variable « établi », c'est-à-dire sinusoïdal forcé[3].

I.2. Équations locales

Dans le conducteur, le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ est régi par les équation suivantes :

Maxwell-Flux :	$\text{div}\vec{B} = 0,$
Maxwell-Gauss :	$\text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0},$
Maxwell-Faraday :	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t},$
Maxwell-Ampère :	$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j},$
Loi d'Ohm :	$\vec{j} = \gamma\vec{E},$
Conservation de la charge :	$\text{div}\vec{j} = 0.$

Dans l'**Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires**, on peut remarquer que **la densité ρ volumique de charges est nulle dans un conducteur**. En effet :

$$\begin{aligned}\rho &= \varepsilon_0\text{div}\vec{E} && \text{(Maxwell-Gauss)}\\ &= \frac{\varepsilon_0}{\gamma}\,\text{div}\vec{j} && \text{(loi d'Ohm)}\\ &= 0 && \text{(conservation de la charge)}\end{aligned}$$

4. Voir dans le chapitre 1, § G.2.

On se propose maintenant d'établir l'équation aux dérivées partielles satisfaite par chacun des deux champs.

Pour trouver l'équation satisfaite par le champ électrique $\vec{E}$, on utilise la formule d'analyse vectorielle suivante[4] :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{E}) - \Delta\vec{E},$$

que l'on transforme en utilisant les équations de Maxwell. Il vient :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) - \Delta\vec{E}.$$

Or $\rho = 0$ dans le conducteur, il vient donc :

$$\Delta\vec{E} - \frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}, \text{ soit } \Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}^{5}.$$

5. Ce type d'équation, contenant le laplacien et la dérivée première temporelle, est appelé « **équation de diffusion** ». On la retrouve dans un grand nombre d'autres domaines de la physique.

Copyrighted material

En coordonnées cartésiennes, cette dernière équation s'écrit :

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$

Comme le dispositif est invariant dans toute translation de directions $x'x$ et $y'y$, on en déduit que le champ ne dépend pas de ces variables. Il reste ainsi :

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.$$

Une démonstration analogue montre que le champ magnétique $\vec{B}$ satisfait cette même équation.

I.3. Calcul du champ

Trouver la solution générale d'une telle équation est impossible. Mais en régime sinusoïdal forcé (établi), et grâce à l'utilisation des complexes, l'équation pourra être simplifiée.

Étant donné que le champ $\vec{E}$ reste une fonction sinusoïdale du temps, ce dernier s'écrit en notation complexe :

$$\vec{\underline{E}} = \underline{f(z)}e^{j\omega t}\,\vec{u}_x\,[1],$$

où $\underline{f(z)}$ est une fonction complexe de z à déterminer.

L'équation devient :

$$\frac{\partial^2\vec{\underline{E}}}{\partial z^2} - \mu_0\gamma\, j\omega\vec{\underline{E}} = \vec{0}, \text{ soit } \frac{\partial^2\underline{f}}{\partial z^2} - \mu_0\gamma\, j\omega\underline{f} = 0.$$

C'est une équation différentielle du second ordre à une seule variable et à coefficients constants[2] du type :

$$\frac{\partial^2\underline{f}}{\partial z^2} - \underline{\alpha}^2\,\underline{f} = 0, \text{ avec } \underline{\alpha}^2 = \mu_0\gamma\, j\omega\,[3].$$

La solution générale en est :

$$\underline{f(z)} = \underline{A}e^{\underline{\alpha}z} + \underline{B}e^{-\underline{\alpha}z}, \text{ avec } \underline{\alpha} = (1+j)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}\,[4].$$

Le champ électrique s'écrit alors :

$$\vec{\underline{E}} = \underline{f(z)}e^{j\omega t}\,\vec{u}_x = (\underline{A}e^{\underline{\alpha}z} + \underline{B}e^{-\underline{\alpha}z})e^{j\omega t}\,\vec{u}_x, \text{ soit :}$$

$$\vec{\underline{E}} = \underline{f(z)}e^{j\omega t}\,\vec{u}_x = \left(\underline{A}e^{(1+j)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}z} + \underline{B}e^{-(1+j)\sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}z}\right)e^{j\omega t}\,\vec{u}_x.$$

En posant $\underline{A} = Ae^{j\varphi}$, $\underline{B} = Be^{j\psi}$ et $\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0\gamma\omega}{2}}$ [5], l'expression du champ réel est donc :

$$\vec{E}(z<0,\,t) = Ae^{\frac{z}{\delta}}\cos(\omega t + \frac{z}{\delta} + \varphi)\vec{u}_x + Be^{-\frac{z}{\delta}}\cos(\omega t - \frac{z}{\delta} + \psi)\vec{u}_x.$$

Les constantes réelles A et B, ainsi que les phases φ et ψ, restent à déterminer grâce aux conditions aux limites.

Le milieu conducteur occupe le demi-espace $z < 0$, et lorsque $z \to -\infty$, le second terme du champ devient infiniment grand.

Le champ électrique ne peut pas devenir infini, donc :

La condition B = 0 est donc nécessaire.

Il reste à écrire la condition de passage du champ électrique lors de la traversée de la surface $z = 0$ qui sépare le vide du conducteur. Le champ élec-

1. Le champ dans le milieu conducteur est colinéaire à celui dans le vide car c'est l'action de ce dernier qui fait apparaître un champ dans le conducteur.

2. Les constantes sont complexes, on travaille donc dans le corps des complexes.

3. $\underline{\alpha}^2$ est nécessairement un complexe car son carré est un imaginaire pur.

4. En effet, $\underline{\alpha}^2 = \mu_0\gamma\omega e^{j\frac{\pi}{2}} = (\sqrt{\mu_0\gamma\omega}\,e^{j\frac{\pi}{4}})^2$, et $e^{j\frac{\pi}{4}} = \frac{1+j}{\sqrt{2}}$.

5. La constante $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$ est homogène à une longueur, puisque l'argument d'une exponentielle doit être sans dimension.

Copyrighted material

trique est dirigé selon $x'x$, il est donc tangentiel et il est donc conservé lors de la traversée de la surface :
$\vec{E}(z = 0^+, t) = \vec{E}(z = 0^-, t)$, à toute date t, soit :

$$E_0\cos(\omega t)\vec{u_x} = Ae^{\frac{z}{\delta}}\cos(\omega t + \frac{z}{\delta} + \varphi)_{z=0}\,\vec{u_x} = A\cos(\omega t + \varphi)\vec{u_x}.$$

On en déduit :

$$A = E_0 \text{ et } \varphi = 0.$$

Le champ s'écrit enfin :

$$\vec{E}(z < 0, t) = E_0 e^{\frac{z}{\delta}}\cos(\omega t + \frac{z}{\delta})\vec{u_x}.$$

À une date t fixée, traçons la courbe donnant les variations de E_x en fonction de z :

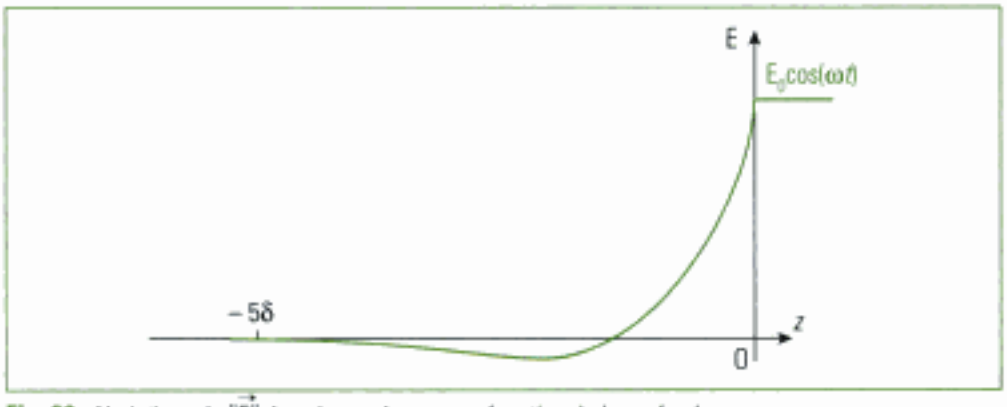


Fig. 26 - Variations de $\|\vec{E}\|$ dans le conducteur en fonction de la profondeur z.

La courbe est en fait un cosinus enveloppé par une exponentielle « décroissante » lorsque l'on s'enfonce vers l'intérieur du conducteur. Lorsque la profondeur atteint 5δ (on a alors $z = -5\delta$), l'exponentielle-enveloppe vaut $e^{-5} \leq 0{,}01$et on peut considérer que le champ est devenu nul : sa valeur est inférieure à 1% de la valeur (maximale) qu'il avait à la surface du conducteur.

Définition 13

On appelle **épaisseur de peau** la constante $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$, homogène à une longueur. C'est la profondeur caractéristique de pénétration du champ à l'intérieur du conducteur.

Les résultats sont identiques pour le champ magnétique $\vec{B}$ et la densité de courant volumique $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ qui vérifient la même équation que $\vec{E}$.

I.4. Modèle du conducteur parfait

Un conducteur est d'autant meilleur que sa conductivité γ est élevée. **Un conducteur parfait possède donc une conductivité γ infiniment grande.**

L'épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\gamma\omega}}$ devient alors nulle. Le champ électrique est alors nul à l'intérieur du conducteur, tout comme la densité de courant volumique $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ et le champ magnétique $\vec{B}$.
Enfin, l'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ donne $\rho = 0$ à l'intérieur du conducteur.

Copyrighted material

Définition 14

Un conducteur parfait se caractérise par **une conductivité γ infiniment grande.**

À l'intérieur du conducteur parfait, la densité volumique de charges ρ, la densité de courant volumique $\vec{j}$, les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ sont nuls.

Lorsque l'épaisseur de peau δ est faible devant une longueur caractéristique de l'étude, alors on peut considérer le conducteur comme parfait.

J. Étude énergétique

J.1. Puissance fournie aux charges mobiles

Soit une charge q possédant la vitesse $\vec{v}$ et plongée dans le champ électromagnétique. Cette charge subit la force de Lorentz :

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

La puissance de la force de Lorentz vaut donc :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = q\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Considérons maintenant une distribution de courant volumique, avec une densité ρ' de charges mobiles, dont n est le nombre de porteurs de charge par unité de volume. Le nombre dN de porteurs de charges mobiles de valeur q compris dans un volume $d\tau$ vaut $dN = nd\tau$. La charge mobile de ce volume s'écrit alors :

$$dq = qdN = nqd\tau = \rho' d\tau.$$

La puissance $d\mathcal{P}$ cédée aux charges mobiles du volume $d\tau$ vaut alors :

$$d\mathcal{P} = dq\vec{E} \cdot \vec{v} = \rho' \vec{v} \cdot \vec{E} d\tau = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

Définition 15

La **puissance volumique $\frac{d\mathcal{P}}{d\tau}$ de la force de Lorentz** cédée à la matière par l'onde électromagnétique vaut :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E}.$$

Cette formule s'applique aux milieux conducteurs. Dans ce cas, comme la loi d'Ohm donne $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, il vient :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 \geq 0.$$

Mais cette puissance ne peut être emmagasinée dans les conducteurs qui la restituent à l'extérieur sous forme d'**effet Joule** (chaleur que l'on peut modéliser par une perte d'énergie due aux chocs entre les diverses charges mobiles).

J.2. Grandeurs énergétiques

Définition 16

Le **vecteur de Poynting** correspond à la densité du flux d'énergie électromagnétique et est défini par :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

$\vec{R}$ est homogène à une puissance surfacique ; son unité SI est le $W \cdot m^{-2}$.

Théorème 3

Signification du vecteur de Poynting

Le flux sortant du vecteur de Poynting $\vec{R}$ à travers une surface S est égal au débit d'énergie électromagnétique à travers cette surface.

Définition 17

Soit $\frac{dW}{d\tau}$ **la densité volumique d'énergie électromagnétique** du champ.

Elle est défini par :

$$\frac{dW}{d\tau} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$ [1].

Son unité est le $J \cdot m^{-3}$.

1. $\frac{dW}{d\tau}$ est une notation explicite d'énergie volumique, puisque dW représente l'énergie présente dans le volume $d\tau$, et leur rapport $\frac{dW}{d\tau}$ est bien une énergie volumique.

J.3. Équation locale de Poynting

Nous nous plaçons en un point M quelconque du vide, où le champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ est créé par les densités de charges fixes et mobiles. Exprimons la puissance volumique de la force de Lorentz en utilisant l'équation de Maxwell-Ampère $\left(\vec{j} = -\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}\right)$:

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}.$$

2. C'est une formule de dérivation d'un produit, voir le formulaire du chapitre 1.

On rappelle que : $\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B}$ [2], d'où il vient :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{B} = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B}).$$

L'expression de la puissance volumique cédée à la matière prend alors la forme :

$$\frac{d\mathcal{P}}{d\tau} = \vec{j} \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})\right).$$

En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday $\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, il vient :

$$\vec{j} \cdot \vec{E} = -\varepsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \vec{B} - \text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})\right).$$

En remarquant que $\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2}{2}\right)$ et $\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{B^2}{2}\right)$, on obtient finalement :

Propriété 18

Équation locale de Poynting

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div}\vec{R} = 0.$$

Cette équation traduit localement le bilan énergétique dans le vide.

J.4. Bilan global et interprétation

Pour dégager la signification concrète de ces quantités présentes dans l'équation locale, intégrons chacun des membres de cette équation sur un volume τ délimité par une surface fermée S (fig. 27)[1] :

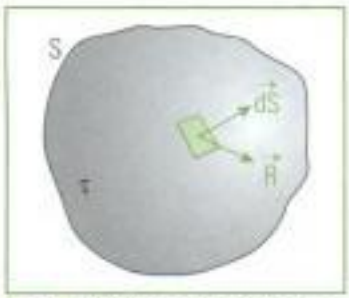


Fig. 27 - Volume τ délimité par la surface fermée S et contenant l'énergie électromagnétique W.

$$\iiint_\tau \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) d\tau = -\iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\, d\tau - \iiint_\tau \mathrm{div}\vec{R}\, d\tau, \text{ soit :}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint_\tau \frac{dW}{d\tau} d\tau = -\iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\, d\tau - \oiint_S \vec{R}\cdot\vec{n}\, dS,$$ $\vec{n}$ étant la normale sortante à la surface fermée S.

Or $\iiint_\tau \frac{dW}{d\tau} d\tau = \iiint_\tau dW = W$[2], énergie électromagnétique contenue dans le volume τ. L'équation bilan devient alors :

Propriété 19

Équation de conservation de l'énergie au niveau global

Soit un volume τ contenant une énergie électromagnétique W et délimité par une surface fermée S. On a :

$$\underbrace{\frac{\partial W}{\partial t}}_{\substack{\text{variation}\\ \text{de l'énergie}}} = \underbrace{-\iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\, d\tau}_{\substack{\text{perte par « effet Joule »}\\ \text{(fournie à la matière)}}} \underbrace{-\oiint_S \vec{R}\cdot\vec{n}\, dS}_{\substack{\text{perte d'énergie}\\ \text{par rayonnement}}}.$$

Propriété 20

Le module $R = \|\vec{R}\|$ du vecteur de Poynting $\vec{R} = R\vec{u}$ représente la puissance surfacique transportée[3] par le champ dans la direction de son vecteur unitaire $\vec{u}$.

1. Lorsque l'opérateur divergence ou des grandeurs volumiques interviennent dans une équation, on a intérêt à intégrer cette équation sur un volume pour appliquer la formule d'Ostrogradsky et interpréter physiquement le bilan sur la grandeur considérée.

2. La notation explicite de l'énergie volumique permet de mieux comprendre que $\frac{dW}{d\tau} d\tau$ est l'énergie dW présente dans l'élément de volume $d\tau$.

3. Transportée par rayonnement, ou rayonnée.

Copyrighted material

L'essentiel

✓ Sources du champ électromagnétique

• La **densité volumique de charges** en un point P a pour expression :

$$\rho(P) = \frac{dq}{d\tau},$$

où dq est la charge du volume élémentaire $d\tau$ autour de P.



Elle s'exprime en $C \cdot m^{-3}$. La charge totale d'un volume τ s'écrit alors :

$$q = \iiint_\tau dq = \iiint_\tau \rho(P) d\tau.$$



• La **densité surfacique de charges** en un point P appartenant à une surface S a pour expression :

$$\sigma(P) = \frac{dq}{dS},$$

où dq est la charge de la surface élémentaire dS autour de P.



Elle s'exprime en $C \cdot m^{-2}$. La charge totale d'une surface S s'écrit alors :

$$q = \iint_S dq = \iint_{P \in S} \sigma(P) dS.$$



• La **densité de courant volumique** $\vec{j}$ est définie par :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v},$$

où ρ_m est la densité volumique de charges mobiles de vitesse $\vec{v}$.

Elle s'exprime en $A \cdot m^{-2}$. L'intensité totale I traversant une section S de conducteur s'écrit alors:

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}.$$



• La **densité de courant surfacique** $\vec{j_S}$ est définie par :

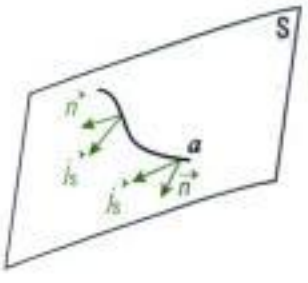
$$\vec{j_S} = \sigma_m \vec{v},$$

où σ_m est la densité volumique de charges mobiles sur une surface S de vitesse $\vec{v}$.

Elle s'exprime en $A \cdot m^{-1}$. L'intensité totale I traversant une ligne a contenue dans la surface conductrice S s'écrit alors :

$$I = \int_a di = \int_a \vec{j_S} \cdot \vec{n}\, da,$$

avec $\vec{n}$ vecteur unitaire tangent à la surface S et orthogonal à a en tout point de a.



✓ Étude des potentiels

• Le **potentiel vecteur** $\vec{A}$ du champ magnétique $\vec{B}$ a pour expression :

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}.$$

• Le **potentiel scalaire** V du champ électrique $\vec{E}$ a pour expression :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

✓ Équations locales du champ électromagnétique

• Les équations de Maxwell dans le vide s'écrivent :

$$\begin{cases} \text{div}\vec{B} = 0 & \text{Équation de Maxwell-flux} \\ \text{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0} & \text{Équation de Maxwell-Gauss} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{Équation de Maxwell-Faraday} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} & \text{Équation de Maxwell-Ampère} \end{cases}$$

• L'**équation locale de conservation de la charge** est la suivante :

$$\text{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

• En régime statique (indépendant du temps), les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont indépendants l'un de l'autre ; en régime variable, ils sont couplés.

• En statique, les potentiels V et $\vec{A}$ vérifient les **équations de Poisson** respectives :

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\vec{A} + \mu_0\vec{j} = \vec{0}.$$

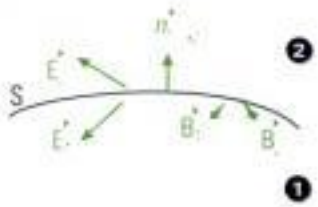
• L'**équivalence de la matière diélectrique** (caractérisée par une polarisation) se fait en tout point :

– avec du vide dans lequel on a placé les densités fictives $\rho_P = -\,\text{div}\vec{P}$ et $\vec{j_P} = \dfrac{\partial \vec{P}}{\partial t}$, densité volumique de charges et densité de courant volumique.

– avec du vide en remplaçant la permittivité absolue ε_0 par ε.

✓ Conditions de passage du champ électromagnétique à la traversée d'une surface S sur laquelle se trouvent des densités σ de charges et $\vec{j_s}$ de courant

$$\begin{cases} \vec{E}_2 - \vec{E}_1 = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}_{1\to 2} \\ \vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j_s} \wedge \vec{n}_{1\to 2} \end{cases}$$



✓ Approximation des états quasi-stationnaires (ARQS)

• Les temps de propagation peuvent être négligés ; le champ s'établit instantanément.

• **Condition de validité de l'ARQS** : si D et T sont respectivement une distance et un temps caractéristiques du système, alors on doit avoir en tout point de l'espace :

$$D \ll cT.$$

✓ Effet de peau

• Un conducteur plongé dans un champ électrique extérieur n'est siège du champ électrique qu'au voisinage de sa surface sur une épaisseur de l'ordre de 5δ, où δ est appelée **épaisseur de peau**.

Copyrighted material

• Si le champ électrique extérieur admet une pulsation ω et le conducteur possède une conductivité γ alors :

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}.$$

• Un **conducteur** est dit **parfait** si $\gamma \approx +\infty$ (ou $\delta \approx 0$). Dans un tel conducteur, on a :

$$\rho = 0,\ \vec{j} = \vec{0},\ \vec{E} = \vec{0},\ \vec{B} = \vec{0}.$$

✓ Étude énergétique

• $\dfrac{dW}{d\tau} = \varepsilon_0 \dfrac{E^2}{2} + \dfrac{B^2}{2\mu_0}$ est la densité volumique d'énergie électromagnétique du champ.

• $\vec{R} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est le vecteur de Poynting et représente la puissance (surfacique) transportée ou rayonnée par le champ électromagnétique. Le flux de $\vec{R}$ à travers une surface est la puissance électromagnétique qui la traverse.

• $\vec{j} \cdot \vec{E}$ est la puissance volumique cédée aux charges mobiles (« effet Joule »).

• L'**équation locale de Poynting** est la suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) + \vec{j} \cdot \vec{E} + \text{div}\vec{R} = 0.$$

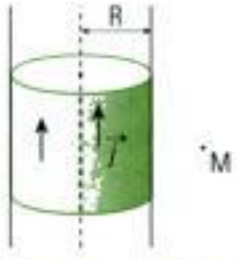
Elle correspond à un bilan d'énergie.

Mise en œuvre

Méthode n°1

Comment trouver l'équation aux dérivées partielles satisfaite par un champ vectoriel ?

On cherche l'équation aux dérivées partielles satisfaite dans l'ARQS par le champ électrique $\vec{E}$ dans un conducteur cylindrique infiniment long parcouru par une densité de courant volumique $\vec{j}$ non uniforme, fonction du temps et colinéaire à son axe.



→ Savoir faire

❶ Si le problème est indépendant du temps ou considéré dans l'ARQS, alors une équation de Maxwell suffit souvent. C'est celle qui relie le champ vectoriel à ses sources. Si tel n'est pas le cas, alors passer à ❷.

❷ Le champ vectoriel reste donc couplé avec l'autre champ, une combinaison des équations de Maxwell est alors nécessaire pour trouver l'équation locale (du second ordre dans ce cas) satisfaite par le champ recherché. Selon la position des sources, elle peut s'écrire différemment dans plusieurs parties de l'espace.

Pour obtenir cette équation, on utilise généralement la formule d'analyse vectorielle :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{W}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\vec{W}) - \Delta\vec{W},$$

où $\vec{W}$ est le champ vectoriel ($\vec{B}$, $\vec{j}$ ou $\vec{E}$). On utilise ensuite les équations de Maxwell pour obtenir l'équation satisfaite par le champ voulu, dans laquelle figure son laplacien.

Copyright

❸ Effectuer les considérations de symétrie et d'invariances pour déterminer la direction du champ et les variables dont il dépend. Choisir le système de coordonnées le plus adapté aux conclusions de ces considérations.

❹ Écrire l'expression du laplacien ou autres opérateurs dans le système de coordonnées choisi pour obtenir l'équation aux dérivées partielles recherchée.

→ Application

❶ Il n'y a pas de charge fixe. La source de champ électrique $\vec{E}$ est donc éventuellement constituée par les variations temporelles du champ magnétique. La densité de courant volumique $\vec{j}$ est source de champ magnétique : il faut donc commencer par l'équation de Maxwell-Ampère : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ dans l'ARQS. On sait que la densité de courant volumique dépend du temps, donc le champ magnétique $\vec{B}$ aussi, et il faut utiliser l'équation de Maxwell-Faraday pour avoir le lien entre les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$: $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. **Les champs sont donc couplés.**

❷ On utilise $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$, avec les équations locales supplémentaires : $\text{div}\vec{E} = 0$ (Maxwell-Gauss) et $\vec{j} = \gamma\vec{E}$ (loi d'Ohm).
La formule d'analyse vectorielle devient alors :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}(0) - \Delta\vec{E},$$

soit

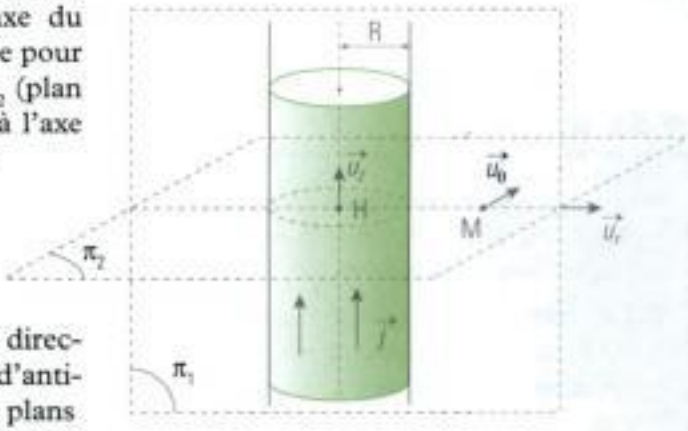
$$-\Delta\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -\mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

et enfin

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}.}$$

❸ **Invariances**
La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation le long de son axe. Une invariance autour d'un axe étant mise en évidence, il est clair que le système de coordonnées cylindriques est adapté. On en déduit $\vec{E} = \vec{E}(r, t)$.

Symétries
Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre. Les plans π_1 (plan contenant l'axe du cylindre et la droite HM) est plan de symétrie pour la distribution, donc $\vec{E}$ est dans ce plan, et π_2 (plan contenant la droite HM et perpendiculaire à l'axe du cylindre) est plan d'antisymétrie pour les sources, donc $\vec{E}$ est orthogonal à ce plan : $\vec{E}$ est dirigé selon le vecteur unitaire $\vec{u}_z$ de la base cylindrique. On remarque *a posteriori* que le plan de symétrie ne sert à rien ici, et on rappelle que pour connaître la direction du champ électrique, il suffit d'un plan d'antisymétrie ou de deux plans de symétrie. Ces plans doivent obligatoirement contenir le point M où l'on cherche la direction du champ.



La forme de la distribution nous invite à choisir le système de coordonnées cylindriques, car les plans de symétrie ou d'antisymétrie sont facilement identifiables dans ce système : $\pi_1 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ et $\pi_2 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$. On a donc trouvé $\vec{E}(M, t) = E(r, \theta, z, t)\vec{u}_z$, puis finalement :

$$\boxed{\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{u}_z.}$$

Copyrighted material

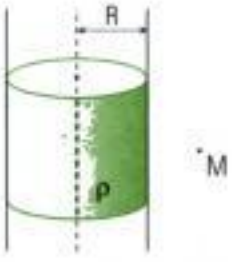
❹ On a ici $\Delta\vec{E} = -\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E})$. Le rotationnel est donc bien simplifié, puisque : $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial E_z}{\partial r}\vec{u}_\theta$ et et $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{E}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E_z}{\partial r}\right)\vec{u}_z$. Avec $\Delta\vec{E} - \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ et en projetant sur l'axe $z'z$ ($E = E_z$), on obtient finalement :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial E}{\partial r}\right) - \mu_0\gamma\frac{\partial E}{\partial t} = 0.$$

Méthode n°2

Comment déterminer un champ à partir des équations locales ?

On cherche à définir le champ électrique $\vec{E}$ créé par une distribution volumique de charges de densité ρ uniforme répartie dans un cylindre de rayon R et de hauteur infinie en utilisant les équations locales.



→ Savoir faire

❶ Effectuer les considérations de symétrie et d'invariances pour déterminer la direction du champ et les variables dont il dépend. Choisir le système de coordonnées le plus adapté aux conclusions de ces considérations.

❷ Rechercher un point où le champ est connu. C'est généralement un point où il est nul, un point en lequel les symétries sont multiples. En effet, comme les équations locales font intervenir la dérivée du champ, une constante d'intégration apparaîtra et sa détermination se fera grâce à la valeur du champ au point où il est connu.

❸ Poser ou rechercher l'équation locale satisfaite par le champ recherché (voir méthode n° 1). L'écrire dans chaque partie de l'espace. En déduire l'équation différentielle satisfaite par le champ.

❹ Résoudre cette équation en commençant par le domaine de l'espace dans lequel se trouve le point où le champ est connu. Trouver la forme générale du champ par intégration, puis déterminer la constante d'intégration en utilisant le point où le champ est connu et/ou la condition sur le champ à l'infini.

❺ Résoudre ensuite éventuellement l'équation locale dans les autres parties de l'espace. Trouver les constantes d'intégration en utilisant les conditions de passage du champ entre les différents domaines de l'espace.

→ Application

❶ La distribution de charges ρ est volumique : le champ électrique est donc défini et continu en tout point de l'espace.

Invariances

La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation le long de son axe. Une invariance autour d'un axe étant mise en évidence, il est clair que le système de coordonnées cylindriques est adapté. On en déduit $E = E(r)$.

Symétries

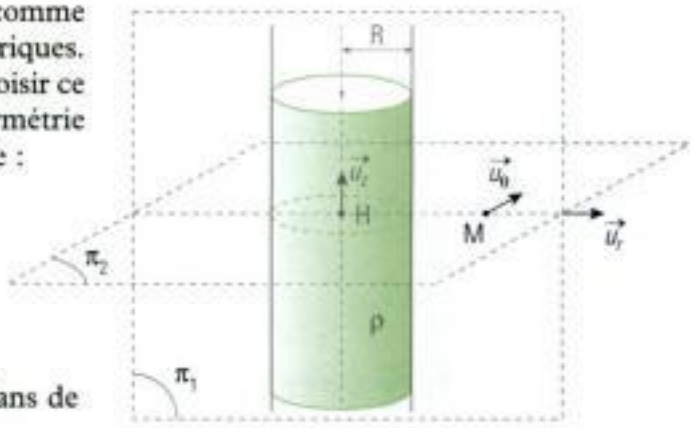
Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre. Les plans π_1 (plan contenant l'axe du cylindre et la droite HM) et π_2 (plan contenant la droite HM et perpendiculaire à l'axe du cylindre) sont plans de symétrie pour la distribution : le vecteur champ électrique $\vec{E}$ est inclus dans leur intersection, la droite HM.

Copyrighted

Donc $\vec{E}$ est dirigé comme $\overrightarrow{HM}$, c'est-à-dire comme le vecteur unitaire $\vec{u_r}$ des coordonnées cylindriques. La forme de la distribution nous invitait à choisir ce système de coordonnées, car les plans de symétrie sont facilement identifiables dans ce système : $\pi_1 = (M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ et $\pi_2 = (M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$.

On a donc trouvé $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z)\vec{u_r}$, puis finalement :

$$\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}.$$



❷ Tous les plans contenant l'axe Oz sont plans de symétrie de la distribution de charges.

Donc $\vec{E}(r = 0)$ est dirigé selon l'intersection de tous ces plans, c'est-à-dire selon $\vec{u_z}$. Or on sait que $\vec{E}(M) = E(r)\vec{u_r}$, donc en un point M de l'axe $z'z$, $\vec{E}(M \in z'z) = \vec{0}$, car $\vec{0}$ est le seul vecteur « colinéaire » à deux vecteurs de base orthogonaux. Finalement :

$$\vec{E}(r = 0) = \vec{0}.$$

❸ C'est un problème d'électrostatique, les champs sont découplés et l'équation locale reliant le champ électrique et ses sources (constituées par les charges fixes) est l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Pour $r < R$, elle s'écrit comme précédemment et pour $r > R$, les charges sont absentes et l'équation locale devient simplement : $\text{div}\vec{E} = 0$.

En coordonnées cylindriques, sachant que le champ $\vec{E}$ est dirigé suivant $\vec{u_r}$ et ne dépend que de r, la divergence s'écrit : $\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE)$.

On a donc :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE) = \begin{cases} \frac{\rho}{\varepsilon_0} \text{ pour } r < R \\ 0 \text{ pour } r > R \end{cases}$$

❹ On sait que $E(r = 0) = 0$, donc on commence par le domaine $r < R$ et on résout $\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rE) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$, soit $\frac{d}{dr}(rE) = \frac{\rho r}{\varepsilon_0}$ qui a pour solution :

$$rE(r) = \frac{\rho r^2}{2\varepsilon_0} + K, \text{ où K est une constante.}$$

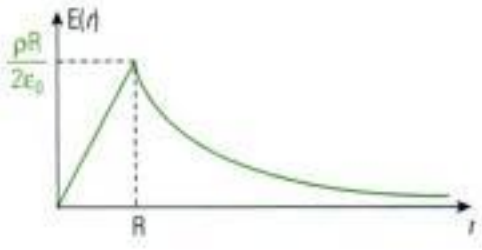
En utilisant $E(r = 0) = 0$, l'équation précédente donne $0 = 0 + K$, soit $K = 0$. Il vient alors :

$$E(r < R) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}.$$

❺ Dans le second domaine $r > R$, on a $\frac{d}{dr}(rE) = 0$ qui donne :

$$E(r) = \frac{K'}{r}, \text{ où K' est une nouvelle constante.}$$

On la détermine en écrivant la condition de passage pour le champ électrique lors de la traversée de la surface $r = R$ qui sépare les deux domaines de l'espace. On remarque que le champ électrique est normal à cette surface et qu'il reste continu car il n'y a pas de charges surfaciques :



$E(r = R^+) = E(r = R^-)$,

soit $E(r = R) = \frac{K'}{R} = \frac{\rho R}{2\varepsilon_0}$ qui donne $\frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0}$,

et :

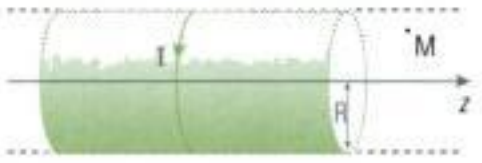
$$E(r > R) = \frac{\rho R^2}{2\varepsilon_0 r}.$$

Copyrighted material

Méthode n°3

Comment déterminer l'énergie d'une distribution ?

On cherche l'énergie électromagnétique créée par la distribution de courant constituée par un solénoïde circulaire de rayon R, de longueur L et comprenant N spires jointives, chacune parcourue par un courant d'intensité I constante. On suppose le champ magnétique nul lorsque l'on se trouve infiniment loin du solénoïde et que celui-ci peut être traité comme un solénoïde infiniment long doté de $n = \dfrac{N}{L}$ spires par unité de longueur.



→ Savoir faire

❶ Déterminer les deux composantes $\vec{E}$ et $\vec{B}$ du champ électromagnétique créé par cette distribution (voir méthodes n° 1 et 2).

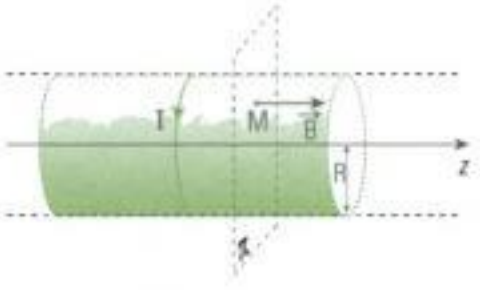
❷ Exprimer la densité volumique d'énergie électromagnétique en fonction des champs précédemment calculés.

❸ Intégrer cette densité volumique sur tout l'espace dans lequel elle est non nulle.

→ Application

❶ C'est un problème de magnétostatique dans lequel le champ électrique est nul, puisqu'il n'y a pas de charges fixes susceptibles de pouvoir le créer : $\vec{E} = \vec{0}$ partout.

Le plan π perpendiculaire à l'axe Oz de révolution du solénoïde et passant par M est plan de symétrie pour les spires du solénoïde, car il est infiniment long. Le champ magnétique $\vec{B}$ en M est donc orthogonal à ce plan : $\vec{B} = B\vec{u}_z$. La forme cylindrique du dispositif nous incite à choisir le système de coordonnées cylindriques.



La distribution de courant est invariante par translation selon la direction de l'axe Oz et par rotation autour de Oz.

Le fait de remarquer une invariance par translation et une par rotation impose aussi le choix des coordonnées cylindriques. L'invariance par translation montre que B ne dépend pas de z et celle par rotation que B ne dépend pas de θ.

On a donc :

$$\vec{B} = B(r)\vec{u}_z.$$

On peut utiliser le théorème d'Ampère (voir exercice classique de magnétostatique de 1re année), mais on travaillera ici avec les équations locales (méthode n° 1).

C'est l'équation de Maxwell-Ampère qui relie le champ $\vec{B}$ à ses sources. En statique, elle s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}, \text{ à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.}$$

Avec $\vec{B} = B(r)\vec{u}_z$ et l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques, on en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{\partial B}{\partial r} = 0, \text{ dont la solution est } \mathbf{B = Cte}.$$

Mais on est en présence de courants superficiels : les spires sont jointives, on en compte n par unité de longueur, chacune parcourue par une intensité I. On peut donc écrire une densité surfacique de courant :

$$\vec{j}_S = nI\vec{u}_\theta, \text{ en coordonnées cylindriques.}$$

Le champ magnétique est donc discontinu à la traversée de cette surface d'équation r = R, et la valeur de ce champ uniforme dans chaque partie de l'espace n'est donc pas la même :

Copyright

$$\vec{B} = \begin{cases} K\vec{u}_z \text{ pour } r < R \\ K'\vec{u}_z \text{ pour } r > R \end{cases}$$

On sait que $B(r \to +\infty) = 0$, ce qui donne $K' = 0$.

De plus lorsque $r \to R$, le champ magnétique est tangentiel et la condition de passage s'écrit, en notant « 1 » la région $\{r < R\}$ et « 2 » $\{r > R\}$:

$$\vec{B}_2 - \vec{B}_1 = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{1\to 2}, \text{ soit } \vec{0} - K\vec{u}_z = \mu_0 nI\, \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r.$$

Cela permet de déterminer K : $K = \mu_0 nI$.

On trouve enfin :

$$\vec{B}(r < R) = \mu_0 nI\, \vec{u}_z \;;\; \vec{B}(r > R) = \vec{0}.$$

❷ La densité volumique d'énergie électromagnétique s'écrit ici :

$$\frac{dW}{d\tau} = \varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2L^2}.$$

❸ En coordonnées cylindriques, l'élément de volume est $d\tau = r dr d\theta dz$, il faut intégrer la densité volumique partout où le champ magnétique est non nul, c'est-à-dire sur tout le volume τ du solénoïde : r varie de 0 à R, θ de 0 à 2π et z varie de 0 à L :

$$W = \iiint_\tau \frac{dW}{d\tau} d\tau = \iiint_\tau \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2L^2} r dr d\theta dz = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2L^2} \int_{r=0}^{R} r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^{L} dz,$$

$$W = \frac{\mu_0 N^2 I^2}{2L^2} \frac{R^2}{2} 2\pi L = \frac{\mu_0 \pi N^2 I^2 R^2}{2L}.$$

Copyrighted material

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

On se place dans un conducteur de conductivité γ.

1) Rappeler la loi d'Ohm locale et l'équation de conservation de la charge.

2) En déduire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par la densité volumique de charges ρ présente dans le conducteur.

3) Résoudre cette équation différentielle, en appelant $\rho_0(M)$ la valeur de ρ en tout point M à l'origine des dates $t = 0$.

4) Pour un point M quelconque de l'espace, tracer l'allure de la courbe $\rho(t)$, décrire le phénomène qui a lieu et en donner une durée caractéristique τ.

5) Application numérique pour un bon conducteur « classique » : $\gamma = 10^6$ SI, $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ SI.

Calculer τ. En déduire qu'un bon conducteur ne peut être chargé que sur sa surface.

Ex. 2

1) Rappeler l'expression de l'épaisseur de peau δ.

2) Application numérique. Calculer δ pour un bon conducteur « classique » : $\gamma = 10^6$ SI, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI, aux fréquences $f_1 = 10$ kHz (grandes ondes), f_2=100 MHz (radio FM), et f_3=10 GHz (paraboles). Conclure.

Ex. 3

En utilisant les équations locales (de Maxwell), déterminer, partout où il est défini, le champ magnétique $\vec{B}$ créé par un cylindre rectiligne infiniment long, à base circulaire de rayon R et parcouru par un courant d'intensité I dans la direction de l'axe et de densité de courant uniforme dans le volume du cylindre. Le milieu extérieur est assimilable au vide.



Ex. 4

Un champ électrique a pour composantes cartésiennes dans une région vide de charges et de courants :

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_0 e^{\alpha x - \beta x} \end{bmatrix}.$$

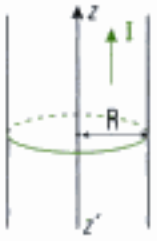
1) Calculer la divergence et le rotationnel de ce champ électrique $\vec{E}$.

2) En déduire les composantes du champ magnétique (on suppose qu'il n'existe aucun champ stationnaire). Vérifier la valeur de sa divergence.

3) Quelle relation doivent vérifier α et β ?

Ex. 5

Un cylindre conducteur de conductivité γ, de rayon R, de longueur h, est considéré comme infiniment long et est parcouru par un courant stationnaire uniformément réparti dans la direction de l'axe, d'intensité I.



1) Déterminer le champ électromagnétique en tout point de l'espace.

2) En déduire le vecteur de Poynting en tout point de l'espace et son flux à travers la surface cylindrique du conducteur. Commenter le résultat.

3) Vérifier l'équation locale de Poynting en tout point. Interpréter.

Ex. 6

On se place en un point quelconque d'un diélectrique plongé dans un champ électrique variable $\vec{E}$.

1) Exprimer le vecteur polarisation en fonction du champ extérieur $\vec{E}$ et des permittivités absolues respectives ε et ε_0 du diélectrique et du vide.

2) Écrire la densité $\vec{j}$ de courant volumique totale en fonction du champ appliqué $\vec{E}$.

3) En déduire que cette densité $\vec{j}$ est identique à une densité de courant volumique de déplacement à condition d'effectuer un changement que l'on explicitera. Conclure.

Niveau 2

Ex. 7

Une distribution de charges est à symétrie sphérique de centre O. Les charges sont réparties en volume avec une densité $\rho(r)$, r désignant la distance au point O. La densité ρ n'est non nulle qu'entre r = R/2 et r = R, elle est nulle ailleurs et la charge totale de la distribution est Q. Le champ électrostatique créé par cette distribution vaut $\vec{E} = k(\alpha r - R)\vec{u_r}$ dans l'intervalle [R/2 ; R], où $\vec{u_r}$ est le vecteur unitaire radial de la base des coordonnées sphériques. Le milieu est assimilable au vide.



Copyrighted material

1) Donner le domaine de définition du champ $\vec{E}$. Que vaut-il au point O ? Le champ est-il continu partout ?

2) En utilisant les équations locales (de Maxwell), déterminer $\vec{E}$ pour $r < R/2$. En déduire la valeur de α.

3) Établir la loi $\rho(r)$. Calculer la charge totale et déduire la valeur de k.

4) En utilisant les équations locales (de Maxwell), déterminer pour $r > R$. Vérifier ce résultat à l'aide du théorème de Gauss.

Ex. 8

Un fil conducteur cylindrique, noté (1), non magnétique, de rayon R_1, d'axe $\Delta = (Oz)$, de très grande longueur, est parcouru par un courant continu, d'intensité I. Le milieu (1) est assimilable au vide. Le fil est entouré par un isolant et par un autre conducteur cylindrique noté (2), de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3.



Le courant d'intensité I passe toujours dans le fil (1) et revient en sens inverse par le conducteur (2), la densité de courant étant toujours uniforme et parallèle à l'axe Δ dans chacun des deux conducteurs.

En utilisant les équations locales (de Maxwell), déterminer le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ créé par ce courant.

Tracer la courbe $B(r)$.

Ex. 9

Une sphère Sp de rayon a, pratiquement ponctuelle et initialement neutre, émet des électrons de manière isotrope à partir d'un instant que l'on prend comme origine des dates. Soit α le nombre d'électrons émis par unité de temps et $\vec{v} = v_0\vec{u}_r$ leur vitesse dont la valeur est considérée comme constante en tout point.

1) Quelle est la densité volumique de charges mobiles ? En déduire la densité de courant $\vec{j}(r, t)$.

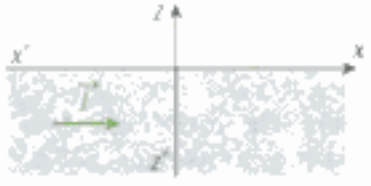
2) Déterminer le champ électrique (supposé isotrope).

3) Déterminer le champ magnétique.

4) Vérifier la compatibilité des équations de Maxwell.

5) Étudier le bilan énergétique.

Ex. 10



Un conducteur linéaire, de conductivité γ, occupe le demi-espace défini par $z < 0$. On étudie dans ce matériau les conséquences d'un courant sinusoïdal de densité de courant $\vec{j} = J(z)\cos\omega t\,\vec{u}_x$. On pourra utiliser la notation complexe (on note $\underline{\vec{E}}$ le complexe associé au champ réel $\vec{E}$).

1) Donner l'expression de $\vec{E}$.

2) On se place dans l'ARQS. À partir des équations de Maxwell, montrer que :

a) $\vec{B}$ est porté par $\vec{u}_y$.

b) $\vec{B}$ ne dépend que de z et de t.

3) Déterminer $\vec{B}(z, t)$.

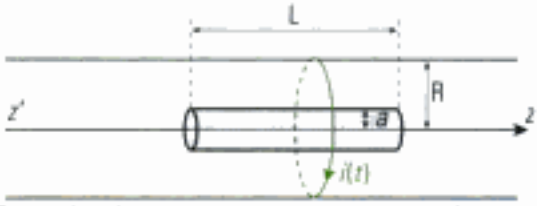
4) Établir l'équation différentielle vérifiée par $J(z)$ ainsi que celle vérifiée par $\underline{E}(z)$ et $\underline{B}(z)$.

5) Déterminer les solutions de l'équation caractéristique de l'équation différentielle précédente et mettre en évidence une longueur caractéristique de la variation spatiale des grandeurs $\vec{j}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

6) Déterminer la loi $\vec{j}(z, t)$ et interpréter le résultat en particulier en étudiant la variation de J avec la distance au plan Oxy à un instant donné.

Ex. 11

Un cylindre métallique de conductivité γ, de rayon a et de longueur L, est placé à l'intérieur d'un long solénoïde de même axe que le cylindre, de rayon R, ayant n spires par mètre, parcouru par un courant de basse fréquence d'intensité $i(t) = I_0\cos(\omega t)$.



1) Rappeler l'expression du champ magnétique créé par ce solénoïde en tout point de l'espace.

2) En déduire que nécessairement, un champ électrique $\vec{E}$ est créé. Le déterminer à l'intérieur du solénoïde.

3) En déduire la densité de courant volumique $\vec{j}$ qui apparaît dans le cylindre conducteur.

4) Déterminer la puissance instantanée dissipée par effet Joule dans le conducteur.

5) Déterminer, à l'intérieur du cylindre, le champ magnétique variable $\vec{B}'$, supposé nul à l'extérieur du cylindre et créé par la densité de courant volumique.

6) Calculer le rapport des amplitudes des champs $\vec{B}$ et $\vec{B}'$. Interpréter.

Ex. 12

Un dispositif est formé de deux armatures sphériques, concentriques et conductrices, de rayons a et $b > a$. L'espace compris entre les armatures possède une conductivité γ. À l'instant $t = 0$, l'armature intérieure est chargée avec une charge Q_0, aucune charge n'est présente ailleurs. On supposera qu'il n'existe aucun champ statique.

Copyrighted material

1) Montrer que la densité volumique de charges ρ reste nulle au sein du conducteur inter-armatures.

2) Établir l'expression du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$ dans le milieu conducteur.

3) Montrer qu'aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par le système. Établir le bilan local des puissances.

4) En déduire l'expression de la charge $Q(t)$ de l'armature intérieure.

5) Établir le bilan intégral des puissances et l'intégrer entre les instants $t = 0$ et $t = +\infty$. Commenter.

Niveau 3

Ex. 13

En 1935, les frères F et H. London décrivent théoriquement « l'effet Meissner », donnant l'évolution du champ magnétique à l'intérieur d'un supraconducteur (milieu dont la permittivité et la perméabilité sont celles du vide). Lorsque le matériau est dans sa phase supraconductrice et qu'il est soumis à un champ magnétique extérieur, des courants (de densité $\vec{j}$) apparaissent. Soient $\vec{v}$ la vitesse instantanée des porteurs de charges associés à ces courants, m leur masse, e leur charge électrique et n leur densité volumique (nombre par unité de volume). On notera $\vec{E}(M, t)$ le champ électrique en un point M de l'intérieur du supraconducteur à l'instant t.

1) Lien entre le champ électrique et la densité de courant.

a) Écrire l'équation de mouvement de chaque porteur considéré comme n'étant soumis qu'à la seule action du champ électrique.

b) En écrivant la relation entre $\vec{j}$ et $\vec{v}$, montrer que : $\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \dfrac{\partial \vec{j}}{\partial t}$, où l'on exprimera la constante λ en fonction de m, n, e et μ_0.

c) Montrer que λ est homogène à une longueur. On rappelle $\varepsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, où c est la célérité.

d) Calculer λ pour l'aluminium avec les données suivantes :

$m = 0{,}9 \cdot 10^{-30}$ kg, $n = 18 \cdot 10^{28}$ m^{-3}, e $= 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ SI.

2) Dans toute la suite, on se place en régime quasi-stationnaire. Le matériau est localement neutre ($\rho = 0$ en tout point).

a) Écrire les équations de Maxwell dans le supraconducteur siège de la densité de courant $\vec{j}$ déterminée en **1)**.

b) En déduire que le champ magnétique $\vec{B}$ est solution de :

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2}\right] = \vec{0}.$$

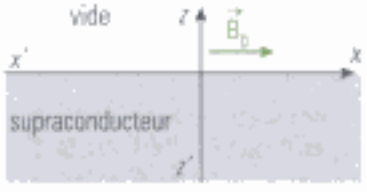
3) Les frères London ont postulé que la solution devait vérifier :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}.$$

Montrer que $\vec{B}$ doit satisfaire à l'équation dite « de London » :

$$\Delta\vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}.$$

4) Solution de l'équation. Dans toute la suite, on considère le cas d'une plaque supraconductrice infinie dans les directions x et y, occupant le demi-espace $z < 0$, l'origine O étant choisie sur la surface de la plaque. On applique le champ $\vec{B} = B_0\vec{u}_x$, uniforme à l'extérieur du matériau et on cherche un champ de la forme $\vec{B} = B(z)\vec{u}_x$, dans le matériau.



a) Quelle est la solution générale $B(z)$ de l'équation obtenue en **3)** (les constantes ne sont pas à calculer ici) ?

b) Les courants étant considérés dans cette partie comme répartis dans le volume du matériau, il n'y a pas de courants surfaciques à l'interface vide-supraconducteur. En déduire les conditions aux limites qui doivent être satisfaites par la solution générale dans la géométrie proposée.

c) En déduire l'expression de $B(z)$ en fonction de B_0, z, λ.

d) Tracer l'allure du graphe de $B(z)$. Quelle distance caractéristique des variations de B peut-on définir à l'intérieur du supraconducteur ?

e) Commenter : résumer l'effet Meissner.

Ex. 14

On charge un condensateur plan de capacité C à travers une résistance R aux bornes d'un générateur idéal de force électromotrice U constante (à l'origine des dates $t = 0$, le condensateur est déchargé). On suppose que ses armatures sont circulaires de surface S mais qu'elles peuvent être considérées comme des plans infinis séparés par une distance d de vide (isolant parfait).

1) Représenter le schéma électrique et déterminer la loi $q(t)$, charge de l'armature positive.

2) Déterminer le champ électrique $\vec{E}(t)$ entre les armatures (on le suppose nul ailleurs). On suppose que la charge est uniformément répartie sur les armatures.

3) En déduire que, nécessairement, un champ magnétique $\vec{B}$ existe entre les armatures. Quelle en est la source ?

4) Quelle est la topographie du champ magnétique $\vec{B}$ (direction, variables) ? Pour cette étude, on ne suppose pas les armatures comme des plans infinis.

Copyrighted material

5) À l'aide de l'équation locale adéquate, montrer que :

$$B = \|\vec{B}\| = \frac{\mu_0 U r}{2RS} e^{-\frac{t}{RC}}.$$

6) Utiliser le théorème d'Ampère généralisé pour retrouver $\vec{B}$ entre les armatures.

7) Le modèle est-il en accord avec l'ensemble des équations de Maxwell ?

8) Étude énergétique.

a) Dans l'étude électrique de ce circuit RC, quelle est la puissance P reçue par le condensateur ? On l'exprimera en fonction de U, R, C et t.

b) En déduire l'énergie W reçue par le condensateur entre l'origine des dates et l'instant t.

c) Rappeler l'équation locale de Poynting. Donner l'interprétation physique de chaque terme.

d) Déterminer l'expression du vecteur de Poynting $\vec{R}$ à l'instant t, en fonction de U, r, R, S, d, C et t. On donne l'expression de la capacité de ce condensateur :

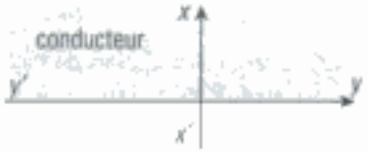
$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

e) En utilisant le vecteur de Poynting, calculer la puissance P reçue par l'intérieur du condensateur à l'instant t. On note a le rayon des armatures. Conclure.

Ex. 15

Un milieu conducteur de conductivité $\gamma = 5{,}6 \cdot 10^7\ \Omega^{-1} \cdot m^{-1}$, caractérisé par la permittivité diélectrique $\varepsilon_0 = \frac{1}{36\pi \cdot 10^9}$ S.I. et la perméabilité magnétique $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ S.I., occupe le demi-espace $x > 0$ et est limité par le plan $x = 0$.

Ce conducteur est placé dans un champ électromagnétique sinusoïdal de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$ et invariant par translation selon les axes Oy et Oz.



On se placera dans tout le problème aux fréquences $f < f_0$, fréquence pour laquelle le module du courant de déplacement est égal au millième du module du courant de conduction.

1) Calculer la fréquence f_0. Commenter.

2) Établir l'équation différentielle vérifiée par le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ en $M(x, y, z)$ à l'instant t, à l'intérieur du conducteur.

3) Les lignes de courant dans ce conducteur sont parallèles à l'axe Oy.

a) Montrer, qu'au point $M(x, y, z)$, la densité de courant volumique est de la forme :

$$\vec{j}(x, t) = j_0 e^{\frac{x}{\delta}} \cos(2\pi f t - kx)\vec{u}_y,$$

où les coefficients δ et k seront exprimés en fonction de f et γ.

b) Justifier la dénomination « d'épaisseur de peau » attribuée à δ.

4) a) Exprimer le champ magnétique $\vec{B}(x, t)$ dans le conducteur en M.

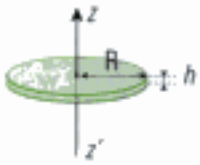
b) En déduire la puissance moyenne P_R rayonnée à travers une surface plane S située dans le plan d'abscisse x, en fonction de S, j_0, x, δ et γ.

5) Exprimer la puissance moyenne P_J dissipée par effet Joule dans le parallélépipède délimité par les plans $x = 0$ et $x = 5\delta$ et de section S. On suppose que $e^{-5} \ll 1$.

6) Comparer P_R et P_J. Conclure.

Ex. 16

Un condensateur plan est formé d'un ensemble de deux disques conducteurs, de même rayon R, parallèles, de même axe Oz, distants de $h \ll R$ et séparés par du vide. On utilise les coordonnées cylindriques (r, θ, z).



On applique, dans l'espace situé entre les deux disques, un champ électrique uniforme $\vec{E}_1 = E_0 \cos\omega t\ \vec{u}_z$ où $\vec{u}_z$ est un vecteur de base pour les coordonnées cylindriques. On suppose qu'aucun champ ne dépend de la variable z.

1) Montrer qu'il existe dans cet espace un champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par $\vec{E}_1$.

2) Donner, en la justifiant, la direction de $\vec{B}_1$ ainsi que les variables dont il dépend.

3) À partir de l'équation de Maxwell reliant $\vec{B}_1$ à sa source, et en utilisant l'écriture complexe, exprimer $\underline{B}_1$ en fonction de $\underline{E}_1$, r, ω et c.

4) En déduire la forme instantanée de $\vec{B}_1$ (expression réelle du champ).

Le champ magnétique $\vec{B}_1$ crée lui-même un champ électrique noté $\vec{E}_2$.

5) On suppose que le champ électrique $\vec{E}_2$ est dirigé selon $\vec{u}_z$. Établir la relation entre $\frac{\partial \underline{E}_2}{\partial r}$ et $\underline{E}_1$ et en déduire $\underline{E}_2$ en fonction de $\underline{E}_1$, ω, r et c.

6) Écrire le champ électrique total sous la forme $\underline{E}_1[1 - k^2(r)]$ et exprimer $k(r)$.

7) AN : $\omega = 6 \cdot 10^7$ rad·s^{-1} ; R = 10 cm ; c = $3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}. Calculer k(R). Commenter.

On considère maintenant que $\vec{E}_2$ crée un champ magnétique $\vec{B}_2$, qui crée $\vec{E}_3$, qui crée $\vec{B}_3$ et ainsi de suite. On suppose que les champs électriques $\vec{E}_i$ sont dirigés selon $\vec{u}_z$.

8) En utilisant les résultats des questions précédentes, exprimer $\frac{\partial \underline{E}_3}{\partial r}$ en fonction de $\underline{E}_2$ puis en fonction de $\underline{E}_1$. En déduire $\underline{E}_3$ en fonction de $\underline{E}_1$ et de $k(r)$.

9) Quelle est l'expression du champ électrique total à la distance R = 10 cm de l'axe si on néglige les champs

Copyrighted material

dont l'amplitude ne dépasse pas 0,01 % de l'amplitude de E_1 ? On prend $\omega = 6 \cdot 10^7$ rad·s^{-1} et $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

Ex. 17

On considère une sphère de rayon R uniformément chargée de densité de charges ρ.

1) Calculer le champ électromagnétique créé par cette distribution en tout point de l'espace, en utilisant les équations locales.

2) En déduire l'énergie W du champ électromagnétique de cette distribution.

3) On dit que l'énergie d'une distribution est égale au travail que doit fournir un opérateur pour rassembler ces charges depuis des positions où elles sont infiniment éloignées les unes des autres. L'opérateur construit la sphère précédente couche par couche : lorsque la sphère a pour rayon r, il apporte une charge dq qu'il dépose dessus, pour obtenir une sphère de rayon $r + dr$.

a) Exprimer la charge dq.

b) Exprimer le champ électrique créé par la sphère de rayon r à une distance $r' > r$ de son centre. Quelle force subit la charge dq se trouvant à la distance r' ?

c) En déduire le travail dW_{ES} des forces électrostatiques lorsque l'opérateur apporte la charge dq sur la sphère.

d) En déduire le travail dW_{op} que l'opérateur a alors effectué.

e) Quel est le travail total W_{op} de l'opérateur pour construire entièrement cette sphère ? Conclure.

Indications

Ex. 1

2) On utilise une équation de Maxwell pour obtenir l'équation aux dérivées partielles.

Ex. 5

1) On utilise la loi d'Ohm pour déterminer le champ électrique $\vec{E}$ et les équations locales pour obtenir le champ magnétique $\vec{B}$.

Ex. 8

Il faut en premier lieu déterminer les densités de courant volumique dans les deux conducteurs.

Ex. 9

1) On étudie la charge émise pendant dt. Ces charges se sont déplacées à la vitesse v_0 et se trouvent donc dans le volume d'une sphère creuse dont il reste à déterminer le volume. On en déduit la densité volumique de charges.

La densité de courant est par définition :

$$\vec{j}(M, t) = \rho(M, t)\, \vec{v}(M, t) .$$

2) On utilise le théorème de Gauss.

3) Le champ magnétique est obtenu à partir des équations locales.

Ex. 13

1) c) On part de l'équation $\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \dfrac{d\vec{j}}{dt}$.

Ex. 14

1) Il s'agit d'une étude électronique.

2) On considère les armatures comme des plans infinis.

4) Les armatures sont ici considérées comme circulaires et non infinies.

Ex. 15

4) b) On intègre la valeur moyenne du vecteur de Poynting.

5) On intègre la valeur moyenne $\langle \vec{j} \cdot \vec{E} \rangle$ de la puissance fournie aux porteurs de charges par unité de volume.

Ex. 17

1) On étudie le champ électrique $\vec{E}$ puis le champ magnétique $\vec{B}$.

Copyrighted material

Solutions des exercices

Exercices de niveau 1

Exercice 1

1) La loi d'Ohm locale s'écrit :

$$\vec{j}(M, t) = \gamma \vec{E}(M, t),$$

où $\vec{j}(M, t)$ représente la densité de courant volumique qui traverse le conducteur en un point M à l'instant t et $\vec{E}(M, t)$ le champ électrique au point M à l'instant t.

L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\mathbf{div}\vec{j}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0,$$

où $\rho(M, t)$ représente la densité volumique de charges présentes au point M à l'instant t.

⚠ Dans ces expressions, on fait intervenir le point M pour bien insister sur le fait que ces relations sont locales et le temps t pour ne pas oublier que ce sont des grandeurs variables au cours du temps. Dans les exercices suivants, on simplifie souvent ces expressions en écrivant :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E} \quad \text{et} \quad \text{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

2) À partir des expressions précédentes, on peut écrire une relation entre le champ électrique et la densité volumique de charge : $\gamma\, \text{div}\vec{E}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0$.

Il faut alors trouver une autre relation entre le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ et la densité volumique de charge. Il s'agit de l'équation de Maxwell-Gauss qui permet d'écrire : $\text{div}\vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$.

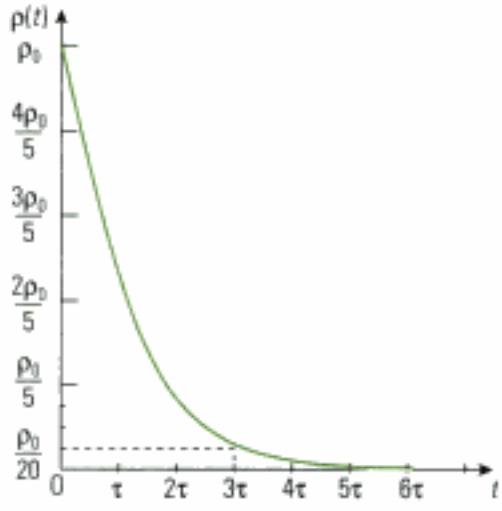
On en déduit : $$\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0.$$

3) On retrouve là une équation différentielle du premier degré qui se résout sous la forme :

$$\rho(M, t) = \rho_0(M)e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}.$$

4) La courbe représentant l'évolution de la densité ρ volumique de charges a une forme exponentielle décroissante.

L'étude de la fonction exponentielle décroissante nous permet de dire qu'au bout d'un temps $t = 3\tau$, $\rho(M, t) = \frac{5}{100}\rho_0$ et au bout d'un temps $t = 5\tau$, $\rho(M, t) \leq 0{,}01\rho_0$.



5) *Application numérique* : $\tau = 8{,}85 \cdot 10^{-18}$ **s**.

Cela signifie qu'au bout d'un temps de l'ordre de 5τ, soit $4{,}4 \cdot 10^{-17}$ seconde, la densité volumique de charges ρ pourra être considérée comme nulle. Cette durée est faible et de ce fait, les variations de ρ ne sont pas prises en compte. On peut alors considérer que la densité volumique de charges est nulle en tout point du volume d'un bon conducteur. Cependant, rien n'empêche une charge en surface.

Copyrighted material

⚠ Dans toutes les applications concernant des champs électromagnétiques (notamment les ondes) qui seront abordés en deuxième année, le champ électromagnétique varie sur des temps caractéristiques supérieurs à 10^{-15} seconde. L'approximation est donc valable.

Exercice 2

1) D'après le cours, l'expression de l'épaisseur de peau est $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$.

⚠ Cette expression est valable pour un conducteur de conductivité γ soumis à un champ électrique extérieur uniforme sinusoïdal de pulsation ω.

2) Pour un bon conducteur classique, les valeurs de l'épaisseur de peau sont :

δ	f
5 mm	10 kHz
50 µm	100 MHz
5 µm	10 GHz

On remarque que l'épaisseur de peau diminue lorsque la fréquence augmente.

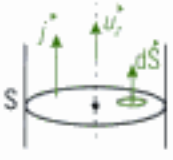
Pour un câble de diamètre fixé, lorsque l'effet de peau intervient (épaisseur de peau petite devant le diamètre du câble), le courant circule sur une faible épaisseur à la périphérie du câble. Ceci a pour effet d'augmenter sa résistance.

En électronique, les circuits imprimés sont réalisés avec des couches de cuivre d'épaisseur de l'ordre de la dizaine de micron. Dans ces circuits, l'épaisseur de peau n'a que peu d'influence aux fréquences usuelles. Cependant, dans le domaine de l'hyperfréquence ($f > 1$ GHz), la modélisation des circuits électroniques doit tenir compte, entre autres, de cet effet. Ces circuits doivent alors être étudiés en utilisant la théorie des lignes de transmission.

Exercice 3

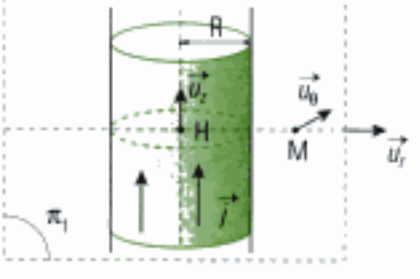
Le cylindre parcouru par un courant d'intensité I et de densité de courant uniforme dans le volume du cylindre est considéré comme une distribution de courant volumique uniforme notée $\vec{j}$. La distribution de courant ayant une forme cylindrique, on travaille en coordonnées cylindriques d'axe (Oz) qui représente l'axe du cylindre.

La distribution de courant est volumique donc **le champ magnétique est défini et continu en tout point.**



• Dans un premier temps, on détermine $\vec{j}$. Le courant dans le cylindre a une direction parallèle à l'axe du cylindre. Donc $I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ où $\vec{j}$ est dirigé suivant l'axe (Oz) et S est la section circulaire de rayon R du cylindre. On considère la section du cylindre donc $d\vec{S} = dS\vec{u_z}$ et on suppose la répartition uniforme du courant donc $\vec{j}$ a même valeur en tout point du cylindre. On en déduit $I = j \times \pi R^2$. D'où : $\vec{j} = \frac{I}{\pi R^2}\vec{u_z}$.

• Afin de déterminer le champ magnétique $\vec{B}$, on met en œuvre la méthode n° 2 : on étudie les symétries et invariances du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace.



Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre. Le plan π_1 (plan contenant l'axe du cylindre et la droite HM) est plan de symétrie pour la distribution, donc $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan. $\vec{B}$ est dirigé selon le vecteur unitaire $\vec{u_\theta}$ de la base cylindrique. On remarque que tout plan d'antisymétrie ne sert à rien ici.

Copyright material

La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon son axe. On en déduit $B = B(r)$.

On conclut, dans un système de coordonnées cylindriques, que :

$$\vec{B}(M) = B(r)\vec{u}_\theta.$$

• Ensuite, il faut trouver un point où le champ magnétique a une valeur connue. Considérons un point de l'axe (Oz). Tous les plans contenant l'axe du cylindre sont plans de symétrie de la distribution de courant. Donc $\vec{B}(r = 0)$ est orthogonal à tous ces plans. Ceci n'est réalisable que si le vecteur est nul. On a donc $\vec{B}(r = 0) = \vec{0}$.

• Enfin, on utilise une équation de Maxwell qui permet de calculer le champ magnétique à partir de ses sources. Il s'agit évidemment de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines $\{r \leq R\}$ et $\{r \geq R\}$ où le milieu est assimilable au vide.

On remarque que l'on est dans un problème de magnétostatique où il n'y a aucune distribution de charges fixes : le champ électrique $\vec{E}$ est donc nul en tout point.

Le champ électrique est solution du système d'équations :

$$\begin{cases} \text{div}\,\vec{E} = 0 & \text{Maxwell-Gauss} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0} & \text{Maxwell-Faraday} \end{cases}$$

On obtient alors $\vec{E} = \overrightarrow{Cte}$, constante que l'on choisit nulle en supposant qu'il n'y a pas de champ permanent.

On connaît le champ magnétique sur l'axe, on commence donc l'étude à l'intérieur du cylindre.

➤ **Pour $r \leq R$,** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ d'où $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rB(r)]\vec{u}_z = \mu_0 j \vec{u}_z$.

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r}[rB(r)] = \mu_0 j r.$$

Cela donne : $rB(r) = \mu_0 j \frac{r^2}{2} + K$ où K est une constante d'intégration.

Le champ magnétique nul sur l'axe $B(r = 0) = 0$ donne $K = 0$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\mathbf{B(r \leq R) = \mu_0 j \frac{r}{2}}.$$

➤ **Pour $r \geq R$,** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du cylindre d'où :

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rB(r)]\vec{u}_z = \vec{0}$.

Le champ magnétique satisfait donc l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial r}[rB(r)] = 0.$$

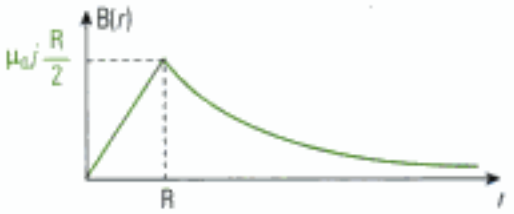
Cela donne : $rB(r) = K'$ où K' est une constante d'intégration.

Le champ magnétique est continu à la surface du cylindre puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, alors $RB(r = R) = \mu_0 j \frac{R^2}{2} = K'$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\mathbf{B(r \geq R) = \mu_0 j \frac{R^2}{2r}}.$$

La courbe du champ magnétique B en fonction de la distance r est alors :



Copyrighted material

On retrouve la même distribution d'amplitude de champ dans la méthode n° 2. On aurait ainsi pu tout de suite avoir l'évolution de B(r) avec l'analogie suivante :

	électrostatique	magnétostatique
champ	$\vec{E}$	$\vec{B}$
densité volumique	de charges ρ	de courant $\vec{j}$
constante	ε_0	$\frac{1}{\mu_0}$

Exercice 4

1) En coordonnées cartésiennes, la divergence du champ électrique s'écrit :

$$\mathbf{div}\vec{\mathbf{E}} = \frac{\partial E_x}{\partial z} = 0.$$

En coordonnées cartésiennes, le rotationnel du champ électrique s'écrit :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial E_x}{\partial x}\vec{u_y}, \text{ soit } \mathbf{\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \beta E_z \vec{u}_y}.$$

2) On met en œuvre la méthode n° 2 :

On connaît le champ électrique. Pour déterminer le champ magnétique, on utilise alors l'équation de Maxwell-Faraday.

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne $\beta E_0 e^{\alpha z - \beta x}\vec{u_y} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

La constante d'intégration étant nulle puisqu'on suppose qu'il n'existe aucun champ stationnaire, on trouve :

$$\vec{B} = -\frac{\beta}{\alpha} e^{\alpha z - \beta x}\vec{u}_y.$$

Il reste à vérifier l'équation de Maxwell-Flux : $\text{div}\vec{B} = \frac{\partial B}{\partial y} = 0$.

3) Enfin, la quatrième équation de Maxwell va permettre de trouver une relation entre α et β.

On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ puisque l'étude s'effectue dans une région vide de courant.

Or $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{\partial B}{\partial x}\vec{u_z} = \frac{\beta^2}{\alpha}E_0 e^{\alpha z - \beta x}\vec{u_z}$ et $\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \varepsilon_0\mu_0\alpha E_0 e^{\alpha z - \beta x}\vec{u_z}$.

On en déduit : $\frac{\beta^2}{\alpha} = \varepsilon_0\mu_0\alpha$ soit $\mathbf{\beta^2 = \varepsilon_0\mu_0\alpha^2}$.

Il est toujours intéressant d'effectuer l'analyse dimensionnelle d'une égalité trouvée. Ici, β s'exprime en m^{-1}, α en s^{-1} et $\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}$ en $s^2 \cdot m^{-2}$, ce qui prouve la validité dimensionnelle de la relation.

Exercice 5

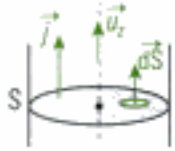
1) On met en œuvre la méthode n° 2 :

Le cylindre parcouru par un courant d'intensité I de densité uniforme dans le volume du cylindre est considéré comme une distribution de courant volumique notée $\vec{j}$. La distribution de courant ayant une forme cylindrique, on travaille en coordonnées cylindrique d'axe (Oz) qui représente l'axe du cylindre.

La distribution de courant est volumique donc **les champs électrique et magnétique sont définis et continus en tout point.**

Copyright material

• Dans un premier temps, on détermine $\vec{j}$. Le courant dans le cylindre a une direction parallèle à l'axe du cylindre. Donc, $I = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$ où $\vec{j}$ est dirigé suivant l'axe (Oz) et S est la section circulaire de rayon R du cylindre. On considère la section du cylindre donc $d\vec{S} = dS\vec{u}_z$ et on suppose la répartition uniforme donc $\vec{j}$ a même valeur en tout point du cylindre.



On en déduit $I = j \times \pi R^2$. D'où : $\vec{j} = \dfrac{I}{\pi R^2}\vec{u}_z$.

• Tout d'abord, le champ magnétique $\vec{B}$ de cette distribution a été défini à l'exercice 3. On avait trouvé :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 j \dfrac{r}{2}\vec{u}_\theta = \mu_0 \dfrac{Ir}{2\pi R^2}\vec{u}_\theta & \text{pour } r \le R \\ \mu_0 j \dfrac{R^2}{2r}\vec{u}_\theta = \mu_0 \dfrac{I}{2\pi r}\vec{u}_\theta & \text{pour } r \ge R \end{cases}$$

⚠ Concernant le champ électrique $\vec{E}$, on l'avait supposé nul dans l'exercice 3, car on se trouvait dans un problème de magnétostatique (sans distribution de charges fixes) avec un cylindre considéré comme conducteur parfait (sa conductivité γ était alors supposée infinie).

• Étudions maintenant le champ électrique $\vec{E}$.

La loi d'Ohm permet alors de déterminer le champ électrique dans le cylindre : $\vec{E} = \dfrac{\vec{j}}{\gamma}$.

On a donc : $$\textbf{pour } r \le R, \vec{E} = \frac{I}{\gamma\pi R^2}\vec{u}_z.$$

Comme il n'y a pas de distribution de charges, le champ électrique est nul à l'extérieur.

On a donc : $$\textbf{pour } r \ge R, \vec{E} = \vec{0}.$$

2) • À partir de ces résultats, on peut déterminer le vecteur de Poynting en tout point :

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}.$$

⚠ On note $\vec{\Pi}$ le vecteur de Poynting pour éviter la confusion avec le rayon R du conducteur.

Pour $r \le R$, on a : $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{I}{\gamma\pi R^2}\vec{u}_z \wedge \dfrac{Ir}{2\pi R^2}\vec{u}_\theta = -\dfrac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2}\dfrac{r}{2}\vec{u}_r$.

Pour $r \ge R$, comme $\vec{E} = \vec{0}$, on a $\vec{\Pi} = \vec{0}$.

• Le vecteur de Poynting à l'interface entre le conducteur et le vide est :

$$\vec{\Pi} = -\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2}\frac{R}{2}\vec{u}_r.$$

Le flux du vecteur de Poynting à travers la surface du conducteur est le flux de $\vec{\Pi}$ à travers la surface S dont le vecteur surface élémentaire est $d\vec{S} = dS\vec{u}_r = R d\theta dz\,\vec{u}_r$.

$$\iint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S} = \iint_S -\frac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2}\frac{R}{2} R d\theta dz = -\frac{I^2}{2\gamma\pi^2 R^2}\int_0^h dz \times \int_0^{2\pi} d\theta.$$

Donc $\iint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S} = -\dfrac{h}{\gamma\pi R^2} I^2 = -\dfrac{h}{\gamma S} I^2$.

⚠ La puissance du rayonnement électromagnétique **reçue** par un système τ délimité par une surface fermée S correspond au flux : $-\oiint_S \vec{\Pi}\cdot d\vec{S}$, où $d\vec{S}$ est orientée vers l'extérieur du système.

On retrouve que l'énergie électromagnétique cédée par le conducteur à l'extérieur à travers sa surface est négative. Il s'agit donc d'**une énergie reçue par le conducteur**.

Copyrighted material

Le conducteur ne peut emmagasiner d'énergie. Un bilan énergétique montre alors que cette énergie est forcément cédée à l'extérieur sous une autre forme. Cette énergie est ainsi cédée sous forme d'énergie thermique qu'on appelle « effet Joule ».

La puissance perdue par effet Joule est celle cédée par le champ aux porteurs de charges du conducteur :

$$P_J = \iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,d\tau = \iiint_\tau \frac{j^2}{\gamma}\,d\tau = \frac{I^2}{\gamma S^2}\tau = \frac{I^2 h}{\gamma S}.$$

⚠ La puissance thermique reçue par un système τ et fournie par la matière (les porteurs de charges) correspond à l'intégrale :

$$-\iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,d\tau.$$

☼ On retrouve bien que la puissance dissipée par effet Joule est proportionnel à I^2.
En première année, on a vu que cette puissance s'écrit pour un conducteur de résistance R_{elec} sous la forme $R_{elec}I^2$.
On en déduit la résistance du conducteur cylindrique de longueur h et de rayon R : $\mathbf{R_{elec} = \frac{h}{\gamma S}}$.

3) On distingue deux domaines :

• **Pour $r \leq R$,** l'énergie électromagnétique par unité de volume est :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{I}{\gamma\pi R^2}\right)^2 + \frac{\mu_0}{2}\left(I\frac{r}{2\pi R^2}\right)^2.$$

Le courant I est continu donc : $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{dW}{d\tau}\right) = 0.$

On calcule $\mathrm{div}\vec{\Pi} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}(r\Pi) = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(-\dfrac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2}\dfrac{r^2}{2}\right) = -\dfrac{I^2}{\gamma(\pi R^2)^2}$ et $\vec{j}\cdot\vec{E} = \dfrac{1}{\gamma}\left(\dfrac{I}{\pi R^2}\right)^2$.

On vérifie alors que : $\mathbf{div}\vec{\Pi} + \vec{j}\cdot\vec{E} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{dW}{d\tau}\right) = 0.$

• **Pour $r \geq R$,** l'énergie électromagnétique par unité de volume est :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{2}\left(\frac{I}{2\pi R^2}\right)^2.$$

Le courant I est continu donc : $\dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{dW}{d\tau}\right) = 0.$

On calcule $\mathrm{div}\vec{\Pi} = 0$ et $\vec{j}\cdot\vec{E} = 0$.

On vérifie alors que : $\mathbf{div}\vec{\Pi} + \vec{j}\cdot\vec{E} + \dfrac{\partial}{\partial t}\left(\dfrac{dW}{d\tau}\right) = 0.$

L'équation locale de Poynting est donc vérifiée en tout point.

Exercice 6

1) D'après le cours, le vecteur déplacement électrique est $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon\vec{E}$ où $\vec{P}$ est le vecteur polarisation.
On en déduit : $\mathbf{\vec{P} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\vec{E}}.$

2) La densité totale de courant volumique est :

$$\vec{j} = \vec{j_C} + \vec{j_P} + \vec{j_D},$$

où $\vec{j_C}$ est la densité de courant associée au déplacement de charges, $\vec{j_P} = \dfrac{\partial\vec{P}}{\partial t} = (\varepsilon - \varepsilon_0)\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ est la densité de courant qui modélise le diélectrique et $\vec{j_D} = \varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$ est la densité de courant volumique de déplacement.

Copyright material

Le diélectrique est un milieu isolant donc : $\vec{j_C} = \vec{0}$.

On en déduit : $$\vec{j} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

3) Cette densité de courant volumique est équivalente à une densité de courant volumique de déplacement où l'on a remplacé la permittivité du vide par celle du diélectrique :

$$\vec{j} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

On en conclut que l'étude d'un diélectrique s'effectue de la même manière que celle du vide en remplaçant la permittivité absolue ε_0 du vide par la permittivité absolue ε du milieu.

Exercices de niveau 2

Exercice 7

1) On met en œuvre la méthode n° 2.

• Les charges sont réparties en volume donc **le champ électrique $\vec{E}$ est défini et continu en tout point.**

• La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera donc les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$.

Les plans $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$, $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ et $(O, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique $\vec{E}(O)$ appartient alors à ces trois plans. Ceci n'est possible que si le vecteur $\vec{E}(O)$ est nul puisque ces plans n'ont aucune direction commune :

$$\vec{E}(O) = \vec{0}.$$

2) • L'équation de Maxwell qui permet de déterminer le champ électrique à partir de la densité volumique de charges est l'équation de Maxwell-Gauss : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

Avant tout, on étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point M de l'espace. Les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charges. Le champ électrique est donc porté par la direction de la droite intersection des deux plans. $\vec{E}$ est dirigé selon $\vec{u_r}$.

La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle θ et φ. Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable r.

On a donc : $$\vec{E}(M) = \vec{E}(r)\vec{u_r}.$$

En un point M tel que $r \leq \frac{R}{2}$, la densité volumique de charges est nulle. Donc $\text{div}\vec{E} = 0$. Ce qui donne :

$$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 E)}{\partial r} = 0.$$

On en déduit :

$r^2E(r) = K$ où K est une constante d'intégration.

$E(r = 0) = 0$ donne $K = 0$.

On en conclut : $$\vec{E}\left(r \leq \frac{R}{2}\right) = \vec{0}.$$

• Pour déduire la valeur de α, on utilise la continuité du champ électrique à l'interface $r = \frac{R}{2}$.

On a donc : $E(R) = k\left(\alpha \frac{R}{2} - R\right) = 0$.

On en déduit : $$\alpha = 2.$$

Copyrighted material

3) • Pour déterminer l'expression de $\rho(r)$, il faut utiliser l'équation de Maxwell-Gauss dans le volume défini par $\left\{\frac{R}{2} \leq r \leq R\right\}$.

On obtient alors : $\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E)}{\partial r} = 2k\left(3 - \frac{R}{r}\right) = \frac{\rho(r)}{\varepsilon_0}$.

Donc : $$\boldsymbol{\rho(r) = 2k\varepsilon_0\left(3 - \frac{R}{r}\right).}$$

• La charge totale de la distribution est donnée par intégration de la densité volumique de charges : $Q = \iiint_V \rho(r)d\tau$ où $d\tau$ est un élément de volume de la distribution. L'étude de la distribution s'effectue en coordonnées sphériques, il faut donc utiliser l'élément de volume dans ces coordonnées : $d\tau = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$. Pour décrire le volume de la sphère creuse, il faut intégrer sur r variant de $\frac{R}{2}$ à R, θ variant entre 0 et π (revoir le § A.3 du chapitre 1) et ϕ variant de 0 à 2π.

On obtient : $Q = \int_{R/2}^{R} 2k\varepsilon_0\left(3 - \frac{R}{r}\right)r^2dr \times \int_0^{2\pi} d\phi \times \int_0^{\pi}\sin\theta d\theta = 8\pi k\varepsilon_0\left[r^3 - R\frac{r^2}{2}\right]_{R/2}^{R}$.

On trouve alors $Q = 4\pi k\varepsilon_0 R^3$, ce qui donne : $\boldsymbol{k = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3}}$.

4) • De même que dans la question 2, on utilise la relation de Maxwell-Gauss dans un milieu vide de charges. Cela donne :

$r^2E(r) = K'$ où K' est une constante d'intégration.

La continuité du champ électrique à l'interface $r = R$ donne :

$$K' = R^2E(r = R) = R^2k(2R - R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}.$$

On trouve : $$\boldsymbol{\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r.}$$

• L'application du théorème de Gauss pour $r > R$ nécessite l'étude des symétries qui a permis de déterminer que le champ électrique est de la forme $\vec{E}(M) = \vec{E}(r)\vec{u}_r$.

On choisit alors une surface de Gauss à r constant pour simplifier l'intégration. Cette surface est bien sûr une sphère. On applique ensuite le théorème de Gauss sur cette sphère de rayon r :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Or l'élément de surface est orienté suivant $\vec{u}_r$ donc $\vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)dS$ où $E(r)$ est constant sur la surface d'intégration.

D'où $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r)dS = E(r)\oiint_S dS = E(r)S$ où $S = 4\pi r^2$.

On en déduit : $$\boldsymbol{\vec{E}(r > R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r.}$$

On retrouve donc le même résultat.

Pour $r > R$, la distribution de charges est équivalente à une charge ponctuelle Q placée en O.

Exercice 8

On met en œuvre la méthode n° 2.

• Les cylindre (1) et (2) parcourus par un courant d'intensité I et de densité uniforme dans le volume du cylindre sont considérés comme des distributions de courant volumique notés respectivement $\vec{j}_1$ et $\vec{j}_2$. Les distributions de courant ayant une forme cylindrique, on travaille en coordonnées cylindrique d'axe (Oz) qui coïncide avec l'axe du cylindre.

Copyrighted material

Les distributions de courant sont volumiques donc **le champ magnétique est défini et continu en tout point**.

• Dans un premier temps, on détermine $\vec{j_1}$ et $\vec{j_2}$.

Pour le cylindre (1), $I = \iint_{S_1} \vec{j_1} \cdot d\vec{S}$, où $\vec{j_1}$ est dirigé suivant l'axe Δ et S_1 est la section circulaire de rayon R_1 du cylindre. On considère la section du cylindre donc $d\vec{S} = dS\vec{u_z}$ et on suppose la répartition uniforme donc $\vec{j_1}$ a même valeur en tout point du cylindre.

On en déduit $I = j_1 \times \pi R_1^2$. D'où : $\boxed{\vec{j_1} = \dfrac{I}{\pi R_1^2}\vec{u_z}}$.

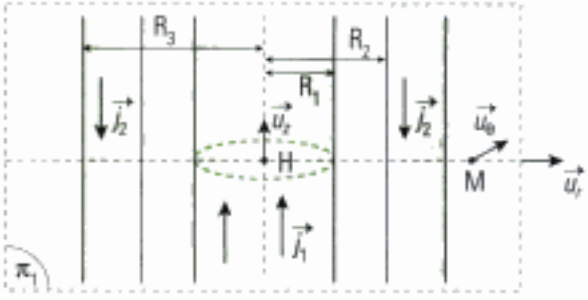
Pour le cylindre (2), $I = \iint_{S_2} \vec{j_2} \cdot d\vec{S}$, où $\vec{j_2}$ est dirigé suivant l'axe Δ et S_2 est la section du cylindre de rayon intérieur R_2 et de rayon extérieur R_3. On considère la section du cylindre donc $d\vec{S} = dS\vec{u_z}$ et on suppose la répartition uniforme donc $\vec{j_2}$ a même valeur en tout point du cylindre et le sens opposé à $\vec{j_1}$.

On en déduit $I = -j_2 \times \pi(R_3^2 - R_2^2)$. D'où : $\boxed{\vec{j_2} = \dfrac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)}\vec{u_z}}$.

• Dans un deuxième temps, on étudie les symétries et invariances du champ magnétique en un point M quelconque de l'espace.

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre. Le plan π_1 (plan contenant l'axe du cylindre et la droite HM) est plan de symétrie pour la distribution, donc $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan. $\vec{B}$ est dirigé selon le vecteur unitaire $\vec{u_\theta}$ de la base cylindrique.

On remarque que tout plan d'antisymétrie ne sert à rien ici.



La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon son axe puisque le fil est supposé de grande longueur. On en déduit $B = B(r)$.

On en conclut, dans un système de coordonnées cylindriques, que :

$$\boxed{\vec{B}(M) = B(r)\vec{u_\theta}}.$$

• Ensuite, il faut trouver un point où le champ magnétique a une valeur connue. Intéressons-nous à $\vec{B}(r = 0)$. Tous les plans contenant l'axe du cylindre sont plans de symétrie de la distribution de courant. Donc $\vec{B}(r = 0)$ est orthogonal à tous ces plans. Ceci n'est réalisable que si le vecteur est nul. Donc $\vec{B}(r = 0) = \vec{0}$.

• Enfin, on utilise une équation de Maxwell qui permet de calculer le champ magnétique en statique. Il s'agit évidemment de l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines $\{r \leq R_1\}$; $\{R_1 \leq r \leq R_2\}$; $\{R_2 \leq r \leq R_3\}$ et $\{r \leq R_3\}$ où le milieu est partout assimilable au vide.

On connaît le champ magnétique sur l'axe donc on commence par l'étude du champ $\vec{B}$ dans le cylindre (1).

➤ **Pour $r \leq R_1$**, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j_1}$ d'où $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}[rB(r)]\vec{u_z} = \mu_0 j_1 \vec{u_z}$.

Cela donne :

$$rB(r) = \mu_0 j_1 \frac{r^2}{2} + K_1 \text{ où } K_1 \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ magnétique est nul sur l'axe : $B(r = 0) = 0$ donc $K_1 = 0$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\boxed{\vec{B}(r \leq R_1) = \mu_0 I \frac{r}{2\pi R_1^2}\vec{u_\theta}}.$$

Copyrighted material

➤ **Pour $R_1 \leq r \leq R_2$**, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ puisqu'il n'y a pas de courant dans l'isolant par définition d'où : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rB(r)]\vec{u}_z = \vec{0}$.

Cela donne :

$$rB(r) = K_2 \text{ où } K_2 \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ magnétique est continu à la surface du cylindre (1) puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, $B(r = R_1) = \mu_0 I \frac{1}{2\pi R_1} = \frac{K_2}{R_1}$ donne : $K_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi}$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\mathbf{B(R_1 \leq r \leq R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}}.$$

➤ **Pour $R_2 \leq r \leq R_3$**, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}_2$ d'où $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rB(r)]\vec{u}_z = \mu_0 j_2 \vec{u}_z$.

Cela donne :

$$rB(r) = \mu_0 j_2 \frac{r^2}{2} + K_3 = -\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{r^2}{2} + K_3 \text{ où } K_3 \text{ est une constante d'intégration.}$$

Par continuité à l'interface $r = R_2$, $R_2 B(R_2) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} = -\mu_0 \frac{I}{\pi(R_3^2 - R_2^2)} \frac{R_3^2}{2} + K_3$ donc :

$K_3 = \mu_0 \frac{IR_3^2}{2\pi(R_3^2 - R_2^2)}$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(R_2 \leq r \leq R_3) = \mu_0 I \frac{(R_3^2 - r^2)}{2\pi R_2 (R_3^2 - R_2^2)} \vec{u}_\theta.$$

➤ **Pour $r \geq R_3$**, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ d'où :

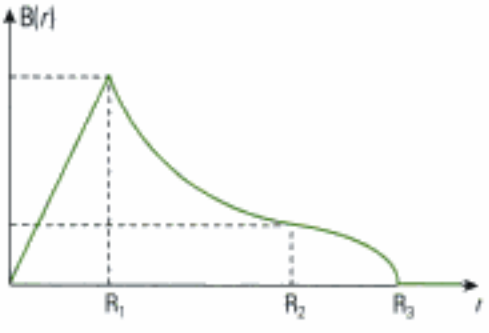
$$rB(r) = K_4 \text{ où } K_4 \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ magnétique est continu à la surface du cylindre (2) puisque l'on est en présence d'une distribution de courant volumique, $B(r = R_3) = 0$ donne donc : $K_4 = 0$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \geq R_3) = \vec{0}.$$

• On peut alors tracer l'évolution du champ magnétique en fonction de la distance r à l'axe (Oz) :



Exercice 9

1) La sphère Sp de rayon a émet des électrons de manière isotrope. Cette sphère se charge donc positivement au cours du temps et les électrons émis de manière isotrope se répartissent dans l'espace autour de cette sphère, d'où l'apparition d'une densité volumique de charges mobiles pouvant dépendre du temps. On calcule alors le nombre d'électrons présents dans un élément de volume dτ de l'espace. La distribution de charge ayant une symétrie sphérique, on utilisera les coordonnées sphériques.

Copyright material

• Les électrons sont répartis de manière isotrope, donc la distribution de charges est invariante par les rotations d'angle θ et φ des coordonnées sphériques. On en conclut que la densité volumique de charges ρ(M, t) ne dépend que de r : ρ(M, t) = ρ(r, t).

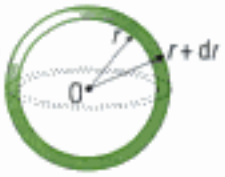
• Tout d'abord, il n'y a aucun électron émis en dehors de la sphère S(O, v_0t). On a donc :

$$\rho(r > v_0t, t) = 0.$$

• Intéressons-nous maintenant à la densité volumique ρ de charges à l'intérieur de la sphère S(O, v_0t).

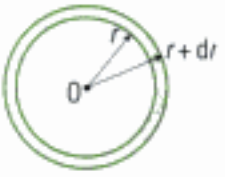
Entre les instants t et $t + dt$, un électron qui possède la vitesse v_0 parcourt la distance $dr = v_0dt$. Soit $0 < t_0 < t$. On retrouve à l'instant t les électrons émis entre t_0 et $t_0 + dt$ dans une sphère creuse de rayon intérieur $r = v_0(t - (t_0 + dt))$ et de rayon extérieur $r + v_0dt$. En écrivant $dr = v_0dt$, ce volume s'écrit :

$d\tau = r^2dr \iint \sin\theta d\theta d\varphi = 4\pi r^2dr$ car on somme sur les angles, et pas sur r.



On peut remarquer que le volume dτ déterminé n'est autre que la « différentielle » du volume de la sphère S(O, r) de centre O et de rayon r.

$$d\tau = d\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right) = 4\pi r^2dr.$$



De la même façon, lorsque l'on cherche la surface dS correspondant à un accroissement dr du rayon du disque de centre O et de rayon r, on peut écrire la « différentielle » de l'expression de la surface du disque.

$$dS = d(\pi r^2) = 2\pi r dr.$$

Ces charges ont été émises pendant la durée dt, la charge correspondante vaut donc $dq = -\alpha e dt$, et la densité volumique de ces charges à la distance r s'écrit donc :

$$\rho(r < v_0t, t) = \frac{dq}{d\tau} = -\frac{\alpha e dt}{4\pi r^2 dr} = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2 v_0}.$$

• Par définition, la densité de courant volumique est : $\vec{j}(r, t) = \rho(r, t)\vec{v}$.

D'où :
$$\vec{j}(r, t) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha e}{4\pi r^2 v_0}\vec{u}_r & \text{pour } r < v_0t \\ \vec{0} & \text{pour } r > v_0t \end{cases}$$

2) Afin de déterminer le champ électrique, on utilise le théorème de Gauss.

Pour cela, on étudie les symétries et invariances de la distribution de charges. On travaille toujours en coordonnées sphériques avec les vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Soit M un point quelconque de l'espace, les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est alors dirigé selon l'intersection de ces plans, c'est-à-dire suivant le vecteur $\vec{u}_r$. La distribution de charges est invariante par les rotations d'angle θ et φ donc le champ électrique ne dépend que des variables r et t. On en conclut :

$$\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{u}_r.$$

Déterminons $E(r, t)$. La surface de Gauss à utiliser est une sphère de centre O et de rayon r du fait de la configuration du champ électrique. Un élément de surface de cette sphère sera alors :

$d\vec{S} = r^2\sin\theta d\theta d\varphi\, \vec{u}_r$.

Le théorème de Gauss s'écrit : $$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0},$$

où Q représente la charge présente dans le volume délimité par la surface S. Cette charge Q est constituée par la charge de la sphère de rayon a à laquelle on ajoute la charge des électrons compris dans le volume délimité par la surface S. On distingue deux cas à l'instant t.

• Si la surface S possède un rayon $r > v_0t$, alors il n'y a aucune charge à l'extérieur du volume délimité par S. Donc la charge à l'intérieur de S est la charge initiale. Or, la sphère est initialement neutre. Donc Q = 0.

Copyrighted material

On en conclut :

$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r, t)r^2\sin\theta d\theta d\varphi = E(r, t)r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi E(r, t)r^2 = 0.$

Ce qui donne :

$$\textbf{Pour } r > v_0 t, \ \vec{E}(r, t) = \vec{0}.$$

• Si la surface S possède un rayon $r < v_0 t$, alors il y a des charges à l'extérieur du volume délimité par S. La charge à l'intérieur de S est donc la charge de la sphère Sp émettrice à laquelle on ajoute la charge des électrons présents dans le volume.

La sphère est initialement neutre et a émis αt électrons. Elle se trouve donc chargée positivement d'une charge $\alpha e t$.

La quantité de charges négatives présentes dans le volume délimité par S est donné par :

$\iiint_V \rho(r', t)r'^2\sin\theta dr' d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^r \rho(r', t)r'^2 dr' = -\frac{\alpha e}{v_0} r.$

Donc $Q = \alpha e t - \frac{\alpha e}{v_0} r.$

On en conclut :

$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r, t)r^2\sin\theta d\theta d\varphi = E(r, t)r^2 \int_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi E(r, t)r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\alpha e t - \frac{\alpha e}{v_0} r\right).$

Cela donne :

$$\textbf{Pour } r < v_0 t, \ \vec{E}(r, t) = \frac{\alpha e\left(t - \frac{r}{v_0}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r.$$

On étudie d'abord les symétries et invariances de la distribution de courant. On travaille toujours en coordonnées sphériques avec les vecteurs de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Soit M un point quelconque de l'espace, les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie de la distribution de courant. Le champ magnétique est alors normal à ces deux plans. Or, ces deux plans sont perpendiculaires. Le champ magnétique est donc nul :

$$\vec{B}(M, t) = \vec{0}.$$

4) On vérifie alors les quatre équations de Maxwell :

• L'équation de Maxwell–flux est évidente : $\text{div}\vec{B} = 0$.

• Vérifions l'équation de Maxwell–Gauss.

Pour $r > v_0 t$, on a $\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E)}{\partial r} = 0$ et $\rho(r, t) = 0$. On a donc bien : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho(r, t)}{\varepsilon_0}$.

Pour $r < v_0 t$, on a $\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 E)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\alpha e\left(t - \frac{r}{v_0}\right)}{4\pi\varepsilon_0}\right) = -\frac{\alpha e}{4\pi\varepsilon_0 v_0 r^2}$ et $\rho(r, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi v_0 r^2}$.

On a donc bien : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho(r, t)}{\varepsilon_0}$.

L'équation de Maxwell-Gauss est vérifiée dans tout l'espace.

• En tout point, le champ électrique est dirigé suivant $\vec{u}_r$ et ne dépend que des variables r et t. Donc $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$. On a aussi démontré que le champ magnétique est nul en tout point.

Par conséquent, **l'équation de Maxwell-Faraday $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$ est vérifiée.**

• Étudions maintenant l'équation de Maxwell-Faraday.

Pour $r > v_0 t$, on a $\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$, $\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{j}(r, t) = \vec{0}$. Donc on vérifie : $\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$.

Copyright material

Pour $r < v_0 t$, on a $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\alpha e}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_r$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{j}(r, t) = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2}\vec{u}_r$.

On a donc : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

L'équation de Maxwell–Ampère est vérifiée dans tout l'espace.

5) Pour étudier le bilan énergétique, on vérifie l'équation locale de Poynting.

• Pour $r > v_0 t$, on a :

– le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$;

– l'énergie électromagnétique par unité de volume $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = 0$;

– $\vec{j}\cdot\vec{E} = 0$.

On vérifie alors que : $\text{div}\,\vec{R} + \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) = 0$.

$\{r > v_0 t\}$ correspond au vide en l'absence de champ électromagnétique. Il n'y a donc aucun échange d'énergie.

• Pour $r < v_0 t$, on a :

– le vecteur de Poynting $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \vec{0}$;

– l'énergie électromagnétique par unité de volume :

$$\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\alpha e\left(t - \frac{r}{v_0}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2$$

donc $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) = \frac{\alpha e}{4\pi r^2} \times \frac{\alpha e\left(t - \frac{r}{v_0}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$;

– On a : $\vec{j}\cdot\vec{E} = -\frac{\alpha e}{4\pi r^2} \times \frac{\alpha e\left(t - \frac{r}{v_0}\right)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$.

On vérifie alors que : $\text{div}\,\vec{R} + \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) = 0$.

Dans le domaine $\{r < v_0 t\}$, il n'y a aucun transfert d'énergie par rayonnement électromagnétique ($\vec{R} = \vec{0}$) ; toute l'énergie électromagnétique fournie par le flux d'électron est dissipée par effet Joule.

L'équation locale de Poynting est vérifiée.

Exercice 10

1) D'après la loi d'Ohm dans un conducteur, on a :

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{J(z)}{\gamma}\cos(\omega t)\,\vec{u}_x.$$

2) a) Soit un point M quelconque de l'espace, le plan $(M, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution de courant. Le vecteur champ magnétique $\vec{B}$ est donc normal à ce plan.

On en déduit : $\vec{B}(M, t) = B(M, t)\,\vec{u}_y$.

b) La distribution de courant est invariante par translation selon les directions des axes (Ox) et (Oy). Donc le champ magnétique est indépendant des variables x et y.

On en conclut : $\vec{B}(M, t) = B(z, t)\,\vec{u}_y$.

Copyrighted material

3) À partir de l'équation de Maxwell-Ampère considérée dans l'ARQS, on peut donner une expression du champ magnétique. On a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \text{ d'où } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \frac{\partial B}{\partial z}\,\vec{u}_x = \mu_0 J(z)\cos(\omega t)\,\vec{u}_x.$$

On en déduit : $\vec{B}(z, t) = \mu_0 \cos(\omega t)\left(\int J(z)\mathrm{d}z\right)\vec{u}_y.$

$\int J(z)\mathrm{d}z$ représente une primitive de la fonction $J(z)$.

4) On met en œuvre la méthode n° 1.

• On part de l'égalité d'analyse vectorielle : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{j}) - \Delta\vec{j}$.

D'après la loi d'Ohm, on a $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, d'où : $\Delta\vec{j} = \gamma[-\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) + \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{E})]$.

Dans l'ARQS, la densité volumique de charges ρ est nulle dans un conducteur (voir cours), donc $\text{div}\,\vec{E} = 0$.

De plus, on a :

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)$, (équation de Maxwell-Faraday)

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})}{\partial t}$ (interversion des dérivées temporelles et spatiales)

$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}$ (équation de Maxwell-Ampère en ARQS)

Donc $\vec{j}$ vérifie l'équation suivante :

$$\Delta\vec{j} = \gamma\mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t}.$$

On reconnaît une équation aux dérivées partielles caractéristique de la physique : une « équation de diffusion » du type : $\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = K\Delta\vec{j}$, où K est une constante.

Or $\vec{j} = J(z)\cos(\omega t)\,\vec{u}_x$ d'où $\vec{j} = \underline{J}(z)e^{j\omega t}\,\vec{u}_x$ qui permet d'écrire $\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = j\omega\underline{J}(z)e^{j\omega t}\,\vec{u}_x$.

Ce qui conduit à l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{J}(z)}{\mathrm{d}z^2} = j\gamma\mu_0\omega\underline{J}(z).$$

• D'après la loi d'Ohm, $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, on peut remplacer donc $\underline{J}(z)$ par $\gamma\underline{E}(z)$ dans l'équation précédente. $\underline{E}$ satisfait donc la même équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\underline{E}(z)}{\mathrm{d}z^2} = j\gamma\mu_0\omega\underline{E}(z).$$

• Pour trouver l'équation vérifiée par $\underline{B}(z)$, on part de : $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B}$.

$\text{div}\,\vec{B} = 0$ et $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}) = \mu_0\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j} = \mu_0\gamma\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\mu_0\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$.

On en déduit :

$$\Delta\vec{B} = \mu_0\gamma\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}.$$

Or on se place en régime sinusoïdal établi, ce qui nous permet d'écrire $\vec{B} = \underline{B}(z)e^{j\omega t+\varphi}\,\vec{u}_y$, où φ représente le déphasage du champ magnétique par rapport à la densité de courant qui est prise comme origine des phases.

Donc $\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = j\omega\underline{B}(z)e^{j\omega t+\varphi}\,\vec{u}_y$ et il vient alors : $\frac{\mathrm{d}^2\underline{B}(z)}{\mathrm{d}z^2} = j\gamma\mu_0\omega\underline{B}(z)$.

$\underline{J}$, $\underline{E}$ et $\underline{B}$ vérifient ainsi la même équation différentielle.

Copyright material

5) L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par $\underline{J}(z)$, $\underline{E}(z)$ et $\underline{B}(z)$ est $r^2 = j\gamma\mu_0\omega = \gamma\mu_0\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$. **Les solutions sont** $\underline{r}_1 = \sqrt{\gamma\mu_0\omega}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$ **et** $\underline{r}_2 = -\sqrt{\gamma\mu_0\omega}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$.

On étudie la dimension du terme $\sqrt{\gamma\mu_0\omega}$. μ_0 s'exprime en $H\cdot m^{-1}$, ω en s^{-1} et γ en Siemens/mètre ou $\Omega^{-1}\cdot m^{-1}$. Le produit $\mu_0\omega$ s'exprime donc en $\Omega\cdot m^{-1}$. Donc $\sqrt{\gamma\mu_0\omega}$ a la dimension de l'inverse d'une distance. On prendra donc comme distance caractéristique de la variation spatiale, que l'on note par exemple δ : $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{\gamma\mu_0\omega}}$.

On peut aussi voir que $\dfrac{d^2\underline{B}(z)}{dz^2}$ a la même dimension que $\gamma\mu_0\omega\underline{B}(z)$, donc que $\gamma\mu_0\omega$ se mesure en m^{-2}.

On peut aussi se souvenir que $\sqrt{\dfrac{2}{\gamma\mu_0\omega}}$ est l'expression de l'épaisseur de peau vue dans le cours. $\sqrt{\dfrac{1}{\gamma\mu_0\omega}}$ a donc bien la dimension d'une distance.

6) La solution de l'équation différentielle pour $\underline{J}(z)$ donne :

$$\underline{J}(z) = \alpha e^{r_1 z} + \beta e^{r_2 z} = \alpha e^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z} e^{j\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z} + \beta e^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z} e^{-j\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z}.$$

On en conclut alors $\vec{\underline{j}}(z, t) = \underline{J}(z)e^{j\omega t}\vec{u}_x$ soit :

$$\vec{\underline{j}}(z, t) = \left(\alpha e^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z} e^{j\left(\omega t + \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z\right)} + \beta e^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z} e^{j\left(\omega t - \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z\right)}\right)\vec{u}_x.$$

Or lorsque l'on pénètre dans le conducteur, le courant ne peut physiquement diverger.

Donc si $z \to -\infty$, $\vec{\underline{j}}(z, t)$ ne doit pas diverger.

On en conclut que β doit être nul sinon $\lim_{z \to -\infty} e^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z} = +\infty$.

Il vient $\vec{\underline{j}}(z, t) = Ae^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z} e^{j\left(\omega t + \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z\right)}\vec{u}_x$.

On note $J(0)$ le courant à l'interface du conducteur, on a alors :

$$\vec{j}(z, t) = J(0)e^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z} \cos\left(\omega t + \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z\right)\vec{u}_x.$$

On observe que le courant dans le conducteur diminue de manière exponentielle lorsque l'on pénètre dans le conducteur. On retrouve ici le **phénomène d'effet de peau** vu en cours.

On trouve une expression de $\vec{E}(z, t) = \gamma J(0)e^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z} \cos(\omega t + \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}} z)\vec{u}_x$. En physique des ondes, une telle expression nous indique que $\vec{E}$ se propage dans la direction $-\vec{u}_z$ à une vitesse $v_\varphi = \dfrac{\omega}{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}} = \sqrt{\dfrac{2\omega}{\gamma\mu_0}}$.

Néanmoins le terme en exponentiel montre que $\vec{E}$ est atténué ou absorbé dans le conducteur. On parle alors d'onde évanescente.

Exercice 11

1) Le champ magnétique créé par le solénoïde infini est :

$$\vec{B} = \begin{cases} \mu_0 n I_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z & \text{à l'intérieur du solénoïde} \\ \vec{0} & \text{à l'extérieur du solénoïde} \end{cases}$$

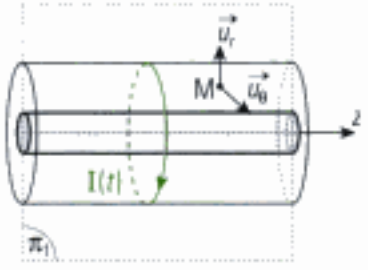
où $\vec{u}_z$ est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde.

Ce résultat est vu en première année. On pourra notamment trouver la démonstration de cette expression dans la méthode n° 2 du chapitre « Le champ magnétique » du livre de première année PCSI.

Copyrighted material

2) • Le champ magnétique est dépendant du temps. Donc $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ est non nul. L'équation de Maxwell-Faraday permet d'en déduire qu'il existe un champ électrique tel que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

• Afin de déterminer le champ électrique, on étudie les symétries et invariances du dispositif. Le solénoïde possède une symétrie cylindrique. On utilise donc les coordonnées cylindriques et la base associée $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ où $\vec{u_z}$ est le vecteur directeur de l'axe du solénoïde.



Si on considère un point M de l'espace, le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$, noté π_1 sur la figure, est un plan d'antisymétrie du solénoïde pour les sources de champ électromagnétique (ici les courants). Donc le champ électrique est normal à ce plan soit $\vec{E}(M, t) = E(M, t)\vec{u_\theta}$.

Le solénoïde est invariant par translation selon son axe et par rotation d'angle θ. Donc le champ électrique est indépendant des variables θ et z. On en conclut que $\vec{E}(M, t) = E(z, t)\vec{u_\theta}$.

• Il reste à trouver un point particulier où le champ électrique nous est connu. Tous les plans contenant l'axe du solénoïde sont plans d'antisymétrie.

Or le champ électrique sur l'axe (Oz) ne peut être orthogonal à tous ces plans : il est donc nul en tout point M de l'axe du solénoïde : $\vec{E}(r = 0, t) = \vec{0}$.

• On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rE(r)]\vec{u_z} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\vec{u_z}$.

On trouve alors :

$$rE(r) = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{r}{2} + K \text{ où K est une constante d'intégration.}$$

$E(r = 0) = 0$ donne donc : $K = 0$.

Ceci conduit à : $$\vec{E}(r, t) = \mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{r}{2}\vec{u_\theta}.$$

3) D'après la loi d'Ohm, on a $\vec{j} = \gamma\vec{E}$, d'où :

$$\vec{j}(r, t) = \gamma\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{r}{2}\vec{u_\theta}.$$

4) On met en œuvre la méthode n° 3.

La puissance volumique dissipée par effet Joule est donné par $\vec{j}\cdot\vec{E}$. Donc la puissance P_J dissipée dans le conducteur est l'intégrale sur le volume V du conducteur de ce produit scalaire :

$$P_J = \iiint_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,d\tau,$$

où $d\tau = r dr d\theta dz$ est un élément de volume du conducteur en coordonnées cylindriques.

Donc :

$$P_J = \iiint_V \gamma\left(\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{r}{2}\right)^2 r dr d\theta dz = \gamma\left(\frac{\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)}{2}\right)^2 \int_0^a r^3 dr \times \int_0^{2\pi} d\theta \times \int_0^L dz.$$

On obtient : $$P_J = \frac{\gamma}{8}\pi L a^4 [\mu_0 n I_0 \omega \sin(\omega t)]^2.$$

5) On met en œuvre la méthode n° 2.

• Le champ magnétique variable $\vec{B}'$ est le champ magnétique créé par la densité de courant volumique présente dans le conducteur.

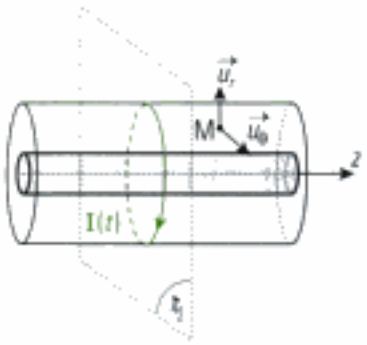
Il est obtenu à partir de l'équation de Maxwell-Ampère $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}' = \mu_0\vec{j}$.

⚠ On se place ici dans l'ARQS car les courants sont de basse fréquence. Le terme du courant de déplacement $\vec{j_D} = \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ est donc évincé de l'équation de Maxwell-Ampère.

Copyright material

• Si on considère un point M de l'espace, le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$, noté π_2 sur la figure, est un plan de symétrie pour la distribution de courant, si on considère L très grand. Donc le champ magnétique est normal à ce plan, soit $\vec{B'}(M, t) = B'(M, t)\vec{u_z}$.

La distribution de courant volumique $\vec{j}$ est invariante par translation selon son axe et par rotation d'angle θ (on considère toujours L très grand). Donc le champ magnétique est indépendant des variables θ et z. On en conclut que $\vec{B'}(M, t) = B'(z, t)\vec{u_z}$.



• Enfin, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans le conducteur ($r \leq a$). On a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B'} = \mu_0 \vec{j} \text{ d'où } \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B'} = -\frac{\partial B'(r)}{\partial r}\vec{u_\theta} = \mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{r}{2}\vec{u_\theta}.$$

On obtient :

$B'(r) = \mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{r^2}{4} + K'$ où K' est une constante d'intégration.

La distribution de courant est à répartition volumique donc le champ magnétique est continu à l'interface $r = a$ avec l'extérieur du conducteur où le champ magnétique $\vec{B'}$ est nul.

On obtient donc $K' = -\mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{a^2}{4}$.

⚠ À l'extérieur du conducteur $\{r > a\}$, $\vec{j} = \vec{0}$ et on a donc :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B'} = \vec{0} \\ \text{div}\vec{B'} = 0 \end{cases}$$

On obtient alors $\vec{B'} = \vec{Cte}$, constante que l'on choisit nulle en supposant qu'il n'y a pas de champ permanent.

On trouve alors : $$\boldsymbol{\vec{B'}(r) = \mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \sin(\omega t)\frac{(r^2 - a^2)}{4}\vec{u_z}}.$$

6) On calcule le rapport des amplitudes :

$$\frac{\text{Amplitude de } B'(r)}{\text{Amplitude de } B(r)} = \frac{\mu_0^2 \gamma n I_0 \omega \dfrac{|r^2 - a^2|}{4}}{\mu_0 n I_0} = \frac{\dfrac{|r^2 - a^2|}{4}}{\dfrac{1}{\mu_0 \gamma \omega}} = \frac{|r^2 - a^2|}{\delta^2},$$

où $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\gamma \mu_0 \omega}}$ est l'épaisseur de peau.

Le champ magnétique $\vec{B'}$ créé par la densité de courant volumique a une amplitude qui croit lorsque l'on pénètre dans le conducteur.

Pour un mauvais conducteur (γ petit), l'épaisseur de peau est grande et le champ magnétique $\vec{B}$ créé par le solénoïde pénètre bien dans le conducteur et est prépondérant.

Pour un bon conducteur (notamment lorsque $\delta \ll a$), la présence du cylindre dans le solénoïde modifie fortement le champ magnétique et ce dernier a du mal à pénétrer à l'intérieur du conducteur. C'est donc le champ $\vec{B'}$ créé par la densité de courant volumique $\vec{j}$ qui devient prépondérant à l'intérieur du cylindre conducteur.

Exercice 12

1) En tout point M du conducteur, les équations locales $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ et $\text{div}\vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ sont vérifiées.

On a donc $\gamma \text{div}\vec{E}(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0$, et, comme $\text{div}\vec{E}(M, t) = \frac{\rho(M, t)}{\varepsilon_0}$ (équation de Maxwell-Gauss), on en déduit :

$$\frac{\gamma}{\varepsilon_0}\rho(M, t) + \frac{\partial \rho}{\partial t}(M, t) = 0.$$

Copyrighted material

C'est une équation différentielle du premier degré qui se résout sous la forme :

$$\rho(M, t) = \rho_0 e^{-\frac{t}{\tau}}, \text{ avec } \tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}.$$

Or, à $t = 0$, on a $\rho = 0$ (conducteur non chargé), donc $\rho_0 = 0$, soit $\boldsymbol{\rho(M, t) = 0}$.

2) On met en œuvre la méthode n° 2.

• La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera donc les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$.

• On cherche à déterminer en premier le champ électrique puisque l'on a une distribution de charges fixes à l'instant initial. On étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point M de l'espace conducteur. Les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie pour la distribution de charge. Donc le champ électrique est porté par la direction de la droite intersection des deux plans. $\vec{E}$ est dirigé selon $\vec{u_r}$.

La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle θ et φ. Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable r.

Donc : $$\boldsymbol{\vec{E}(M, t) = E(r, t)\vec{u_r}}.$$

• Afin d'établir l'expression du champ électrique, on utilise le théorème de Gauss sur une surface S à r constant, c'est-à-dire une sphère :

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Or, l'élément de surface est orienté suivant $\vec{u_r}$ donc $\vec{E}\cdot d\vec{S} = E(r)dS$ où $E(r)$ est constant sur la surface d'intégration.

D'où $\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint_S E(r)dS = E(r)\oiint_S dS = E(r)S = \frac{Q(t)}{\varepsilon_0}$ où $S = 4\pi r^2$ et $Q(t)$ est la charge de l'armature de rayon a.

On en déduit : $$\boldsymbol{\vec{E}(a < r < b) = \frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}}.$$

• Le champ électrique est dirigé selon $\vec{u_r}$ et ne dépend que de r. Donc $\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$.

Ce qui conduit, d'après l'équation de Maxwell-Faraday, à $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$.

Comme il n'existe aucun champ statique, on obtient : $\boldsymbol{\vec{B}(a < r < b) = \vec{0}}$.

3) On met en œuvre la méthode n° 3 .

• La puissance électromagnétique rayonné par le système correspond au flux du vecteur de Poynting à travers la surface fermée entourant le volume du conducteur.

Or le champ magnétique est nul à l'intérieur du conducteur et sur l'interface puisqu'il n'y a pas de courant surfacique. Il en est donc de même du vecteur de Poynting.

On en conclut qu'**aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par le système**.

• Le bilan énergétique local est représenté par l'équation locale de Poynting qui s'écrit :

$$\text{div}\vec{R} + \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) = 0 \quad \text{où} \quad \frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2.$$

On calcule $\text{div}\vec{R} = 0$ et $\vec{j}\cdot\vec{E} = \gamma E^2 = \gamma\left(\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2$.

On obtient alors $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) = -\,\text{div}\vec{R} - \vec{j}\cdot\vec{E} = -\,\gamma\left(\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 = \frac{\varepsilon_0}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{dQ(t)}{dt}$.

Ceci s'écrit aussi sous la forme d'une équation différentielle traduisant le bilan énergétique en tout point du conducteur : $$\boldsymbol{\frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{\gamma}{\varepsilon_0}Q(t)}.$$

Copyright material

4) On en déduit l'expression de Q(t) qui est $\mathbf{Q(t) = Q_0 e^{-\frac{\gamma}{\varepsilon_0}t}}$.

5) On met en œuvre la méthode n° 3.

• La puissance dissipée par effet Joule est $P_J = \iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,d\tau$ où τ représente le volume du conducteur compris entre les armatures et $d\tau$ est un élément de volume de ce conducteur.

Donc $P_J = \iiint_\tau \vec{j}\cdot\vec{E}\,d\tau = \iiint_\tau \gamma\left(\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 r^2\sin\theta\,dr d\theta\,d\varphi$.

D'où $P_J = \gamma\left(\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \int_a^b \frac{dr}{r^2}\int_0^\pi \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\gamma}{4\pi}\left(\frac{Q(t)}{\varepsilon_0}\right)^2\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$.

Si on remplace Q(t) par son expression, on obtient $\mathbf{P_J = \gamma\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)e^{-2\frac{\gamma}{\varepsilon_0}t}}$.

• La puissance électromagnétique cédée par le champ est $P_{em} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\iiint_\tau \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau\right)$ où $d\tau$ représente le volume du conducteur compris entre les armatures et $d\tau$ est un élément de volume de ce conducteur.

Donc $P_{em} = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q(t)}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\int_a^b\frac{dr}{r^2}\int_0^\pi\sin\theta\,d\theta\int_0^{2\pi}d\varphi\right] = -\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\frac{[Q(t)]^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\right]$.

Si on remplace Q(t) par son expression, on obtient $\mathbf{P_{em} = \gamma\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)e^{-2\frac{\gamma}{\varepsilon_0}t}}$.

On retrouve le bilan de puissance. La puissance électromagnétique cédée au conducteur est transformée en puissance thermique par effet Joule : $\mathbf{P_J = P_{em}}$.

• L'énergie dissipée par effet Joule entre les instants $t = 0$ et $t = +\infty$ est $W_J = \int_0^{+\infty} P_J dt$.

$W_J = \gamma\frac{Q_0^2}{4\pi\varepsilon_0^2}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\int_0^{+\infty} e^{-2\frac{\gamma}{\varepsilon_0}t}dt$.

On a alors : $\mathbf{W_J = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}$.

• De même, on trouve que l'énergie électromagnétique cédée par le champ au conducteur est :

$$\mathbf{W_{em} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)}.$$

Exercices de niveau 3

Exercice 13

1. a) L'équation du mouvement du porteur de charges vient de l'application de la deuxième loi de Newton.

Le porteur de charge placé en un point M est soumis uniquement à la force électrique $\vec{F}_e(M, t) = e\vec{E}(M, t)$ d'après l'énoncé.

D'après le principe fondamental de la dynamique, l'équation du mouvement du porteur de charge est :

$$\mathbf{m\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}(M, t) = e\vec{E}(M, t)\ (1)}$$

b) La densité volumique de charges mobiles est donné par $\rho(M, t) = ne$.

Par définition, les porteurs de charges mobiles au point M sont représentés par une densité de courant volumique notée $\vec{j}(M, t)$ telle que $\vec{j}(M, t) = \rho(M, t)\vec{v}(M, t) = ne\vec{v}(M, t)$.

On peut remplacer $\vec{v}(M, t)$ par $\vec{v}(M, t) = \frac{\vec{j}(M, t)}{ne}$ dans l'équation (1).

Copyrighted material

On trouve alors : $\frac{m}{ne^2}\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(M, t) = \vec{E}(M, t)$ (2).

On en déduit l'expression de λ : $\lambda = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}}$.

c) Soit [L] l'unité de la longueur et [T] celle du temps.

$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} \Rightarrow [B][L]^{-1} = [\mu_0][j]$ **(1')**, car l'opérateur rotationnel correspond à une dérivation spatiale.

$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \Rightarrow [E] = [B][L][T]^{-1}$ **(2')**

$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} \Rightarrow [\lambda^2] = \frac{[E]}{[\mu_0]\left[\frac{\partial j}{\partial t}\right]} = \frac{[E][T]}{[\mu_0][j]} = \frac{[E][T][L]}{[B]}$ d'après (1')

$= [L]^2$ d'après (2')

On en déduit que **λ est homogène à une longueur**.

d) Pour l'aluminium, on trouve **λ = 12 nm**.

2) a) Dans l'ARQS, les équations de Maxwell s'écrivent :

$$\mathbf{div}\vec{E} = 0 \quad ; \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad ; \quad \mathbf{div}\vec{B} = 0 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

b) On met en œuvre la méthode n° 1 :

On calcule $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{B})$: $\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) = \mu_0 \overrightarrow{rot}\,\vec{j}$.

Afin d'utiliser l'équation (2), on dérive par rapport au temps : $\frac{\partial}{\partial t}[\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{B})] = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}[\overrightarrow{rot}\,\vec{j}]$.

$$\frac{\partial}{\partial t}[\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{B})] = \mu_0 \overrightarrow{rot}\left(\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

On trouve donc : $\frac{\partial}{\partial t}\left(\overrightarrow{rot}\,(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) + \frac{\vec{B}}{\lambda^2}\right) = \vec{0}$. **(3)**

3) On sait que $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{rot}\,\vec{B}) = \overrightarrow{grad}(\mathrm{div}\,\vec{B}) - \Delta\vec{B}$ et $\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$.

On déduit facilement de l'équation (3) :

$$\Delta\vec{B} - \frac{\vec{B}}{\lambda^2} = \vec{0}. \quad \textbf{(4)}$$

4) a) On se place ici en régime stationnaire : $\vec{B} = B(M)$. De plus, pour des raisons de symétrie, on prendra l'expression : $\vec{B} = B(z)\vec{u}_z$. Si on injecte cette formule dans l'équation **(4)**, on trouve que $B(z)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{d^2B(z)}{dz^2} - \frac{B(z)}{\lambda^2} = 0$.

La solution est donc de la forme : $\mathbf{B(z) = Ae^{-\frac{z}{\lambda}} + De^{\frac{z}{\lambda}}}$.

b) À l'interface, il y a continuité du champ magnétique puisqu'il n'y a pas de courant surfacique. Donc $\mathbf{B(z = 0) = B_0 = A + D}$.

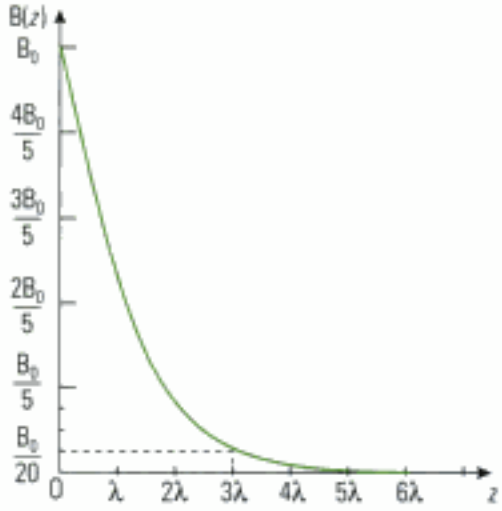
De plus, le champ magnétique ne peut diverger quand on s'enfonce dans le matériau supraconducteur : $\lim_{z \to -\infty} B(z) \neq +\infty$, cela impose donc $A = 0$.

c) On obtient : $\mathbf{B(z) = B_0 e^{\frac{z}{\lambda}}}$.

d) Sur une distance de 3λ, le champ magnétique est inférieur à 5 % du champ à la surface. Sur une distance de 5λ, il est inférieur à 1 % du champ initial et peut donc être considéré comme nul.

Copyright material

λ représente une distance caractéristique de variation du champ magnétique dans le matériau, ou encore l'épaisseur de peau.

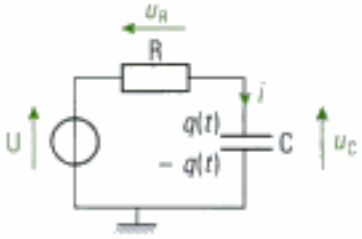


e) Le matériau supraconducteur fait écran au champ magnétique (effet Meissner).

Le champ magnétique dans le supraconducteur, et donc le vecteur densité de courant, peuvent être considérés comme nuls dès que $z < -5\lambda$, soit $|z| > 5\lambda$, $|z|$ représentant la profondeur de pénétration dans le matériau. Cette épaisseur est très faible. Donc ce courant peut être assimilé à un courant surfacique.

Exercice 14

1) Le schéma électrique est celui d'un condensateur en série avec une résistance connectés à un générateur de tension U constante.



Par application de la loi des mailles, on obtient l'équation différentielle dont $q(t)$ est solution :

$$U = u_R + u_C = Ri + \frac{q(t)}{C} = R\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C},$$

d'où : $RC\frac{dq(t)}{dt} + q(t) = CU$.

La solution de cette équation différentielle est la somme de :

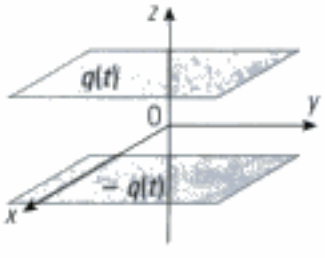
- La solution de l'équation sans second membre de la forme $q_1(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$ où A est une constante.
- La solution particulière de l'équation avec second membre de la forme $q_2(t) = CU$.

Le condensateur étant initialement déchargé ($q(t = 0) = 0$), on détermine ainsi la constante A. On trouve $A = -CU$.

On a donc : **pour $t > 0$, $q(t) = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.**

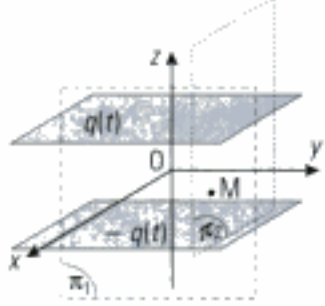
2) Afin de déterminer le champ électrique entre les armatures, on utilise le théorème de Gauss.

On étudie tout d'abord les invariances et les symétries. Pour cela, on introduit un repère cartésien puisque les armatures sont considérées comme des plans infinis. L'axe (Oz) est l'axe perpendiculaire aux deux armatures et les armatures sont des plans parallèles au plan (Oxy).



Les armatures sont uniformément chargées et peuvent être considérées comme des plans infinis donc elles sont invariantes par les translations selon les axes (Ox) et (Oy). Le champ électrique est donc indépendant des variables x et y.

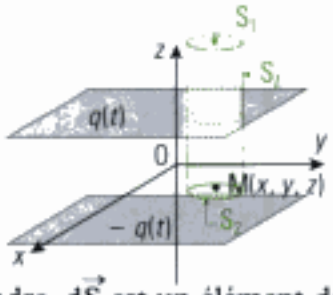
Soit un point M quelconque entre les armatures, les plans $\pi_1 = (Myz)$ et $\pi_2 = (Mxz)$ sont des plans de symétries de la distribution de charges. Donc le champ électrique est dirigé selon l'axe intersection des deux plans, c'est-à-dire l'axe (Oz).



On a donc $\vec{E}(M) = E(z)\vec{u}_z$.

Copyrighted material

On peut alors appliquer le théorème de Gauss. Pour cela, on définit une surface S_C de Gauss cylindrique dont les bases sont situées de part et d'autre de l'armature positive comme indiqué sur la figure ci-contre.



S_1 représente la section du cylindre qui se trouve en-dehors de l'espace inter-armatures, S_2 représente la section où se trouve le point M d'étude et S_l représente la surface latérale du cylindre.

On a donc $\oiint_{S_C} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{Q(t)}{\varepsilon_0}$ où S_C représente la surface fermée du cylindre, $d\vec{S}$ est un élément de surface du cylindre et $Q(t)$ est la charge contenue dans le cylindre.

Soit : $\oiint_{S_C} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} + \iint_{S_l} \vec{E}\cdot d\vec{S}$.

Or, sur la surface latérale, $d\vec{S}$ est orthogonal à $\vec{E}$ donc $\iint_{S_l} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$. De plus, le champ électrique est nul sur la surface S_1 donc $\iint_{S_1} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 0$. Enfin le vecteur $d\vec{S}$ est colinéaire à $-\vec{u}_z$ sur la surface S_2 et le champ électrique ne dépend que de la variable z donc :

$$\iint_{S_2} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -E(z)S_2.$$

La surface de l'armature contenue dans le cylindre est identique à la surface S_2 et chargée avec une densité $\sigma(t)$. Donc $Q(t) = \sigma(t)S_2$.

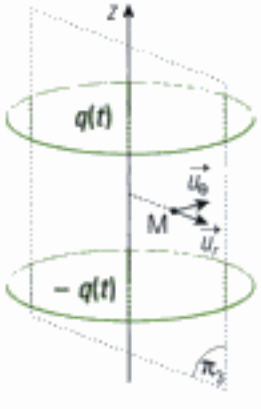
Il reste à déterminer $\sigma(t)$. On sait que la charge $q(t)$ est répartie uniformément sur les armatures cylindriques de surface S. Donc $\sigma(t) = \dfrac{q(t)}{S}$.

D'où : $\oiint_{S_C} \vec{E}\cdot d\vec{S} = -E(z)S_2 = \dfrac{Q(t)}{\varepsilon_0} = \dfrac{q(t)}{\varepsilon_0 S}S_2$.

On en déduit : $$\boxed{\vec{E} = -\frac{q(t)}{\varepsilon_0 S}\vec{u}_z = -\frac{CU(1-e^{-\frac{t}{RC}})}{\varepsilon_0 S}\vec{u}_z}.$$

3) D'après l'équation de Maxwell-Ampère, $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Or le milieu entre les armatures est isolant parfait, il ne peut donc y avoir de densité de courant : $\vec{j} = \vec{0}$. Cependant, le champ électrique dépend du temps donc $\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t} \neq \vec{0}$. **Il existe donc un champ magnétique $\vec{B}$** tel que $\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0\mu_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. **Ce champ magnétique est présent du fait des variations temporelles du champ électrique.**

4) Pour l'étude du champ magnétique, on considère les armatures circulaires. On utilise alors les coordonnées cylindriques.



Soit M un point de l'espace entre les armatures, le plan $\pi_3 = (M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie de la distribution et du champ électrique donc le champ magnétique est normal à ce plan.

Les armatures et le champ électrique sont invariant par rotation d'angle θ. Le champ magnétique est donc indépendant de l'angle θ.

On trouve alors : $$\vec{B} = B(r, z, t)\vec{u}_\theta.$$

5) L'équation que l'on utilise est l'équation de Maxwell-Ampère en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{B} = -\frac{\partial B(r,z,t)}{\partial z}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rB(r,z,t)]\vec{u}_z = \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\mu_0\frac{Ue^{-\frac{t}{RC}}}{SR}\vec{u}_z.$$

Copyright material

On a $\frac{\partial B(r, z, t)}{\partial z} = 0$ et $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[rB(r, z, t)] = -\mu_0 \frac{Ue^{-\frac{t}{RC}}}{SR}$.

On en déduit que B est indépendant de z et que :

$$rB(r, t) = -\mu_0 \frac{Ue^{-\frac{t}{RC}}}{SR}\frac{r^2}{2} + K \text{ où K est une constante (indépendante de } z).$$

Afin de déterminer la constante, on cherche une valeur particulière du champ magnétique. En tout point M de l'axe, tout plan contenant l'axe est plan de symétrie. Le champ magnétique est donc nul sur l'axe : $\vec{B}(r = 0, t) = \vec{0}$. D'où K = 0.

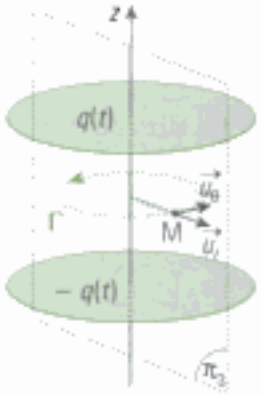
On a donc : $$\boxed{\vec{B}(r, t) = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta.}$$

6) On applique le théorème d'Ampère sur un contour Γ circulaire de rayon r et placé à la cote z.

On se trouve dans un milieu isolant donc :

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0\varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S},$$

où S est une surface qui prend appui sur le contour. On suppose que cette surface est celle du disque du rayon r.



Le contour est orienté dans le sens défini sur la figure donc $d\vec{l} = rd\theta\,\vec{u}_\theta$.

Le champ magnétique est constant sur le contour, voilà pourquoi on a : $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r$.

La surface S est indiquée en vert clair sur la figure précédente. C'est une surface à z constant et $\vec{E}$ reste alors constant aussi. D'après l'orientation du contour, $d\vec{S} = dS\vec{u}_z$.

Donc $\mu_0\varepsilon_0 \iint_S \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \pi r^2$.

On en déduit $B(r, t) = \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t} \times \frac{r}{2} = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}}$.

On trouve alors : $$\boxed{\vec{B}(r, t) = -\mu_0 \frac{Ur}{2SR} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta.}$$

7) L'équation de Maxwell-Ampère est forcément vérifiée.

L'équation de Maxwell-Gauss $\text{div}\vec{E} = 0$ est vérifiée car le champ électrique est dirigé suivant $\vec{u}_z$ et indépendant de z.

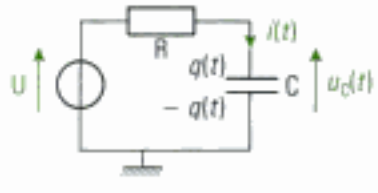
L'équation de Maxwell-flux $\text{div}\vec{B} = 0$ est vérifiée car le champ magnétique est dirigé suivant $\vec{u}_\theta$ et indépendant de θ.

En revanche, $\vec{\text{rot}}\,\vec{E} = \vec{0}$ car $\vec{E}$ est indépendant des coordonnées spatiales et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(r, t) = \mu_0 \frac{Ur}{2SR^2C} e^{-\frac{t}{RC}} \vec{u}_\theta \neq \vec{0}$. **L'équation de Maxwell-Faraday n'est pas vérifiée.**

On en conclut que le modèle est insuffisant pour rendre compte des caractéristiques des champs électrique et magnétique.

8) a) L'étude électrique permet de déterminer la puissance reçue par le condensateur : $P = u_C(t)i(t)$ où $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$ représente la tension aux bornes du condensateur et $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ est le courant traversant le condensateur compté positivement dans la convention récepteur.

On obtient $P = u_C(t)i(t) = \frac{q(t)}{C}\frac{dq(t)}{dt}$ où $q(t) = CU(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$.



Donc $$\boxed{P(t) = \frac{U^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).}$$

Copyrighted material

b) L'énergie reçue par le condensateur est $W = \int_0^t P(t')dt'$.

On trouve : $$\mathbf{W(t) = \frac{CU^2}{2}\left(1 - 2e^{-\frac{t}{RC}} + e^{-2\frac{t}{RC}}\right) = \frac{CU^2}{2}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)^2.}$$

c) L'équation locale de Poynting est :

$$\mathrm{div}\vec{R} + \vec{j}\cdot\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) = 0.$$

• $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dW}{d\tau}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0 \frac{E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}\right)$ représente la puissance électromagnétique volumique cédée par le champ électromagnétique et reçue par le système.

• $\vec{j}\cdot\vec{E}$ représente la puissance volumique cédée par le système aux porteurs de charges. Dans notre cas, $\vec{j}\cdot\vec{E} = \vec{0}$.

• $-\mathrm{div}\vec{R} = -\mathrm{div}\left(\frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0}\right)$ représente la puissance reçue par le système par le rayonnement électromagnétique.

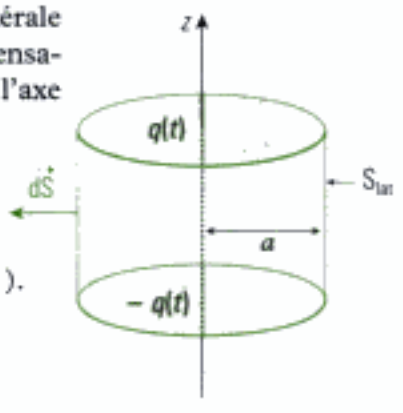
d) Le vecteur de Poynting est $\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{CU^2 r}{2\varepsilon_0 S^2 R} e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\vec{u_r}$.

Or, on donne $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

Donc : $$\mathbf{\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = -\frac{U^2 r}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\vec{u_r}.}$$

e) La puissance cédée par le condensateur est égal au flux du vecteur de Poynting à travers la surface délimitant le condensateur.

La puissance reçue correspond au flux de $-\vec{R}$ à travers la surface latérale du condensateur puisque $\vec{R}$ est dirigé selon $\vec{u_r}$. Cette surface latérale S_{lat} est la surface du cylindre de bases les deux armatures du condensateur. Tous les points de cette surface se trouvent à la distance a de l'axe et l'élément de surface est orienté suivant $\vec{u_r}$.



Donc $P_{reçue} = -\iint_{S_{lat}} \vec{R}\cdot d\vec{S} = -\iint_{S_{lat}} -\frac{U^2 a}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right) a\,d\theta\,dz.$

$$P_{reçue} = \frac{U^2 a^2}{2SRd} e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-d/2}^{d/2} dz = \pi\frac{U^2 a^2}{SR} e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).$$

Avec $S = \pi a^2$, on retrouve :

$$\mathbf{P(t) = \frac{U^2}{R} e^{-\frac{t}{RC}}\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right).}$$

On retrouve le même résultat qu'à la question **8) a)**. Le modèle que l'on utilise semble donc être cohérent pour l'étude énergétique du condensateur.

Exercice 15

1) On doit comparer le courant de conduction et le courant de déplacement, c'est-à-dire pour un conducteur respectivement $\gamma\|\vec{E}\|$ et $\varepsilon_0\left\|\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\|$.

En régime sinusoïdal comme c'est le cas ici, on a $\varepsilon_0\left\|\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right\| = \varepsilon_0\omega\|\vec{E}\|$.

$\omega_0 = 2\pi f_0$ est déterminée par : $\varepsilon_0\omega_0\|\vec{E}\| = \frac{\gamma}{1000}\|\vec{E}\|$.

On obtient alors $f_0 = \frac{\gamma}{2000\pi\varepsilon_0}$, soit $\boldsymbol{f_0 \approx 10^{15}}$ **Hz**.

2) On met en œuvre la méthode n° 1.

On utilise les équations de Maxwell et on détermine $\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{E}) - \Delta\vec{E}$.

Copyright Material

Dans l'ARQS (on travaille ici dans les basses fréquences), la densité volumique de charges ρ est nulle dans un conducteur (voir cours) donc $\text{div}\,\vec{E} = 0$.

D'après l'équation de Maxwell-Faraday, $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$. On a vu en cours que l'on peut intervertir les dérivées spatiales et temporelles donc : $\overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})}{\partial t}$.

On en déduit $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\frac{\partial(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B})}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$ par l'équation de Maxwell-Ampère.

De plus, d'après la loi d'Ohm, on a $\vec{j} = \gamma\vec{E}$.

Donc $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = -\mu_0\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$.

Ceci conduit à l'équation suivante : $\boldsymbol{\Delta\vec{E} = \mu_0\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$.

Ce champ électrique est produit par le champ extérieur qui est invariant par les translations selon les direction Oy et Oz. Il ne dépend donc que de la variable x.

On obtient alors : $\boldsymbol{\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} = \mu_0\gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}}$.

3) a) D'après la loi d'Ohm ($\vec{j} = \gamma\vec{E}$), la densité de courant est solution de l'équation différentielle $\frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial x^2} = \mu_0\gamma \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$.

On se trouve en régime sinusoïdal forcé donc, en notation complexe, $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t} = j\omega\vec{j}$ et le courant est dirigé selon $\vec{u}_y$.

On note alors la densité de courant volumique sous la forme $\vec{j} = \underline{J}(x)e^{j\omega t}\,\vec{u}_y$.

On obtient l'équation différentielle suivante $\frac{\partial^2 \underline{J}(x)}{\partial x^2} = j\mu_0\gamma\omega\,\underline{J}(x)$.

L'équation caractéristique associée à l'équation différentielle vérifiée par $\underline{J}(x)$ est :

$\underline{r}^2 = j\mu_0\gamma\omega = \mu_0\gamma\omega\, e^{j\frac{\pi}{2}}$. Les solutions sont $\underline{r}_1 = \sqrt{\gamma\mu_0\omega}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$ et $\underline{r}_2 = -\sqrt{\gamma\mu_0\omega}\, e^{j\frac{\pi}{4}}$.

La solution pour l'équation différentielle $\underline{J}(x)$ est :

$$\underline{J}(x) = Ae^{\underline{r}_1 x} + Be^{\underline{r}_2 x} = Ae^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x} e^{j\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x} + Be^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x} e^{-j\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x}.$$

On en conclut alors $\vec{j} = \underline{J}(x)e^{j\omega t}\,\vec{u}_y$ soit :

$$\vec{j} = \left(Ae^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x} e^{j\left(\omega t + \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x\right)} + Be^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x} e^{j\left(\omega t - \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x\right)}\right)\vec{u}_y.$$

Or lorsque l'on pénètre dans le conducteur, le courant ne peut diverger. Donc si $x \to +\infty$, $\|\vec{j}\|$ ne doit pas diverger. On en conclut que A doit être nul sinon $\lim_{x\to+\infty} e^{\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x} = +\infty$.

Il reste $\vec{j} = Be^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x} e^{j\left(\omega t - \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x\right)}\vec{u}_y$.

On pose j_0 le courant à l'interface du conducteur, on a alors :

$$\boldsymbol{\vec{j}(x,t) = j_0 e^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x} \cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}\,x\right)\vec{u}_y}.$$

En posant : $\boldsymbol{\delta = \sqrt{\frac{1}{\gamma\mu_0\pi f}}}$ et $\boldsymbol{k = \sqrt{\gamma\mu_0\pi f} = \frac{1}{\delta}}$, on obtient bien la forme de $\vec{j}$ voulue.

b) La densité de courant à la distance 3δ de l'interface est égale à 5 % de la densité de courant sur l'interface. Pour une distance de 5δ, elle est inférieure à 1 % de j_0.

En fonction des approximations, au-delà de ces distances, on pourra négliger le courant : le courant dans le conducteur n'est présent que sur une épaisseur de l'ordre de grandeur de 5δ. C'est pourquoi on appelle δ épaisseur de peau.

Copyrighted material

4) a) Pour obtenir le champ magnétique, on utilise l'équation de Maxwell-Faraday car on connaît le champ électrique $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma}$.

L'étude en complexe est plus aisée.

On a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}} = -\frac{\partial \underline{E}}{\partial x}\vec{u}_z = -\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}(1+j)\frac{j_0}{\gamma}e^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x}e^{j\left(\omega t-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x\right)}\vec{u}_z = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = -j\omega\underline{\vec{B}}$.

Soit : $\underline{\vec{B}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma\omega}}e^{j\frac{\pi}{4}} \times e^{-j\frac{\pi}{2}}j_0 e^{-\frac{x}{\delta}}e^{j(\omega t-kx)}\vec{u}_z$ car $\sqrt{\frac{1}{2}}(1+j) = e^{j\frac{\pi}{4}}$ et $\frac{1}{j} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$.

D'où $\underline{\vec{B}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma\omega}}j_0 e^{-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x}e^{j\left(\omega t-\sqrt{\frac{\gamma\mu_0\omega}{2}}x-\frac{\pi}{4}\right)}\vec{u}_z$.

En notation réelle, on trouve :

$$\vec{B}(x,t) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\gamma\omega}}j_0 e^{-\frac{x}{\delta}}\cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{4})\vec{u}_z.$$

b) La puissance moyenne rayonnée est $P_R = \iint_S \langle\vec{R}\rangle\cdot d\vec{S}$ où $\langle\vec{R}\rangle$ représente la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting et $d\vec{S} = dydz\,\vec{u}_x$ puisque la surface est plane d'abscisse x.

Par définition,

$$\vec{R} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{j}\wedge\vec{B}}{\gamma\mu_0} = \frac{1}{\gamma}\sqrt{\frac{1}{\mu_0\gamma\omega}}j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}\cos(\omega t - kx)\cos(\omega t - kx - \frac{\pi}{4})\vec{u}_x.$$

⚠ Se rappeler de la formule de trigonométrie : $\cos a\cos b = \frac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$.

D'où $\vec{R} = \frac{\delta}{2\gamma\sqrt{2}}j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}\left(\cos(2\omega t - 2kx - \frac{\pi}{4}) + \cos(\frac{\pi}{4})\right)\vec{u}_x$.

Donc $\langle\vec{R}\rangle = \frac{\delta}{2\gamma\sqrt{2}}j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}\cos(\frac{\pi}{4})\vec{u}_x = \frac{\delta}{4\gamma}j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}\vec{u}_x$.

Ce vecteur ne dépend pas de y et de z donc $P_R = \iint_S \langle\vec{R}\rangle\cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\delta}{4\gamma}j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}dydz = \langle R\rangle\cdot S$.

On trouve alors :

$$P_R = \frac{\delta S}{4\gamma}j_0^2 e^{-\frac{2x}{\delta}}.$$

⚠ Pour déterminer le vecteur de Poynting, on a utilisé la notation réelle des champs, car ce vecteur est un produit, donc une opération non linéaire. En notation complexe, le produit des parties réelles n'est pas égal à la partie réelle du produit. On ne peut donc utiliser les notations complexes que lorsque les opérations sur les champs sont linéaires (c'est le cas pour les équations de Maxwell), et pas lorsqu'elles sont non linéaires (c'est le cas des grandeurs énergétiques).

5) La puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le volume V est $P_J = \iiint_V \langle\vec{j}\cdot\vec{E}\rangle d\tau$.

Or $\vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{j_0^2}{\gamma}e^{-\frac{2x}{\delta}}[\cos(\omega t - kx)]^2$ donc $\langle\vec{j}\cdot\vec{E}\rangle = \frac{j_0^2}{2\gamma}e^{-\frac{2x}{\delta}}$.

💡 $\langle\cos^2\rangle = \frac{1}{2}$.

On a alors $P_J = \iiint_V \frac{j_0^2}{2\gamma}e^{-\frac{2x}{\delta}}dxdydz = \frac{S}{2\gamma}j_0^2\int_0^{5\delta}e^{-\frac{2x}{\delta}}dx$.

D'où :

$$P_J = -\frac{S\delta}{4\gamma}j_0^2(e^{-10}-1) \approx \frac{S\delta}{4\gamma}j_0^2.$$

Copyright material

6) On trouve $P_j = P_R(x = 0)$.

La puissance dissipée par effet Joule est égale à la puissance reçue par le conducteur au niveau de l'interface avec l'extérieur ($x = 0$). Cela signifie que toute la puissance reçue par le conducteur est dissipée par effet Joule.

Exercice 16

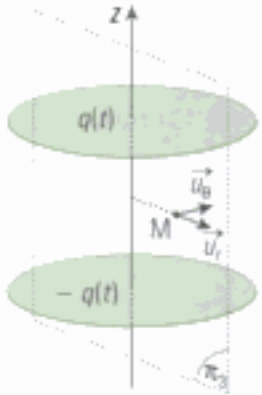
1) D'après l'équation de Maxwell-Ampère, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B_1} = \mu_0 \vec{j} + \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E_1}}{\partial t}$. Or les armatures sont séparés par du vide donc $\vec{j} = \vec{0}$. Cependant, le champ électrique dépend du temps donc $\dfrac{\partial \overrightarrow{E_1}}{\partial t} \neq \vec{0}$.

Il existe donc un champ magnétique $\overrightarrow{B_1}$ tel que $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B_1} = \varepsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial \overrightarrow{E_1}}{\partial t}$.

2) Les armatures sont circulaires. On utilise donc les coordonnées cylindriques.

Les armatures et le champ électrique sont invariant par rotation d'angle θ. Le champ magnétique est donc indépendant de l'angle θ. D'après l'énoncé, il est aussi indépendant de z.

Soit M un point de l'espace entre les armatures, le plan $\pi_3 = (M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie de la distribution et du champ électrique donc le champ magnétique est normal à ce plan.



Il vient alors : $\overrightarrow{B_1} = B_1(r)\vec{u_\theta}$.

3) L'écriture complexe donne $\overrightarrow{\underline{E}_1} = \underline{E}_0 e^{j\omega t}\vec{u_z}$ d'où l'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{\underline{B}_1} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\underline{B}_1(r)]\vec{u_z} = j\omega\mu_0\varepsilon_0\overrightarrow{\underline{E}_1} = j\frac{\omega}{c^2}\overrightarrow{\underline{E}_1}.$$

On en déduit :

$$r\underline{B}_1(r) = j\frac{\omega}{c^2}\underline{E}_0 e^{j\omega t}\frac{r^2}{2} + K \text{ où K est une constante.}$$

Afin des déterminer la constante, on cherche une valeur particulière du champ magnétique. En tout point M de l'axe, tout plan contenant l'axe est plan de symétrie. Le champ magnétique est donc nul sur l'axe $\overrightarrow{B_1}(r = 0) = \vec{0}$ et K = 0.

On a donc : $$\boxed{\overrightarrow{\underline{B}_1}(r) = j\frac{\omega}{c^2}\underline{E}_0\frac{r}{2}e^{j\omega t}\vec{u_\theta}.}$$

4) Le champ réel est $\boxed{\overrightarrow{B_1}(r) = -\dfrac{\omega r}{2c^2}E_0 \sin\omega t\,\vec{u_\theta}}$ car $j\,e^{j\omega t} = j\cos\omega t - \sin\omega t$.

5) Le champ électrique est relié au champ magnétique par l'équation de Maxwell-Faraday qui s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E_2} = \dfrac{\partial \overrightarrow{B_1}}{\partial t}$. Or, $\overrightarrow{B_1}(r) = j\dfrac{\omega}{c^2}\dfrac{r}{2}E_1\vec{u_\theta}$.

Le champ $\overrightarrow{E_2}$ possède les mêmes invariances que le champ $\overrightarrow{B_1}(r)$ dont il découle et ne dépend donc que de la variable r.

On a donc : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E_2} = -\dfrac{\partial E_2}{\partial r}\vec{u_\theta} = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B_1}}{\partial t} = \dfrac{\omega^2}{c^2}\dfrac{r}{2}E_1\vec{u_\theta}$.

D'où : $$\frac{\partial E_2}{\partial r} = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{r}{2}E_1.$$

On en déduit : $$\boxed{E_2 = -\frac{\omega^2}{c^2}\frac{r^2}{4}E_1.}$$

⚠ On a posé arbitrairement la constante d'intégration égale à 0.

Copyrighted material

6) Le champ électrique total est la somme des champs électriques $\vec{E}_1$ et $\vec{E}_2$.

Donc $\vec{E}_{T_1} = \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{r^2}{4}\right)\vec{E}_1$ et $\underline{E}_{T_1} = \left(1 - \frac{\omega^2}{c^2}\frac{r^2}{4}\right)\underline{E}_1$.

On pose : $\boldsymbol{k(r) = \frac{\omega}{c}\frac{r}{2}}$.

7) On trouve $\boldsymbol{k(R) = 0{,}01}$.

Cela signifie que le champ électrique au niveau des extrémités des armatures peut être assimilé à $\vec{E}_1$ si on néglige les effets de bord. On en conclut également que le champ $\vec{E}_2$ est négligeable partout devant $\vec{E}_1$.

8) On fait ici une étude rapide en tenant compte des différentes réponses apportées aux questions précédentes.

L'équation de Maxwell-Ampère donne :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}}_2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}[r\underline{B}_2(r)]\vec{u}_z = j\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}_2 = -j\frac{\omega^3}{c^4}\frac{r^2}{4}\underline{\vec{E}}_1.$$

On en déduit : $\underline{\vec{B}}_2(r) = -j\frac{\omega^3}{c^4}\frac{r^3}{16}\underline{E}_1\vec{u}_\theta$.

Le champ électrique est relié au champ magnétique par l'équation de Maxwell-Faraday qui s'écrit $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}}_3 = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}_2}{\partial t}$.

On a donc : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}}_3 = -\frac{\partial \underline{E}_3}{\partial r}\vec{u}_\theta = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}_2}{\partial t} = -\frac{\omega^4}{c^4}\frac{r^3}{16}\underline{E}_1\vec{u}_\theta = \frac{\omega^2}{c^2}\frac{r}{4}\underline{E}_2\vec{u}_\theta$.

Soit : $$\frac{\partial \underline{E}_3}{\partial r} = -\frac{\omega^4}{c^4}\frac{r^3}{16}\underline{E}_1.$$

On en déduit : $$\boldsymbol{\underline{E}_3 = \frac{\omega^4}{c^4}\frac{r^4}{64}\underline{E}_1 = \frac{[k(r)]^4}{4}\underline{E}_1}.$$

9) Pour R = 10 cm, $k(R) = 0{,}01$, ce qui permet de négliger l'amplitude du champ $\vec{E}_2$ devant celle de $\vec{E}_1$. Les autres champs sont donc aussi négligeables devant $\vec{E}_1$. D'où : $\vec{E} \approx \vec{E}_1$.

On peut conclure de ce résultat que sur la totalité de l'espace entre les armatures du condensateur, le champ électrique global est assimilable au champ $\vec{E}_1$ de départ.

Exercice 17

1) On applique la méthode n° 2.

➢ Il s'agit d'une distribution de charges. **On étudie alors en premier le champ électrique.**

• Les charges sont réparties en volume donc **le champ électrique $\vec{E}$ est défini et continu en tout point.**

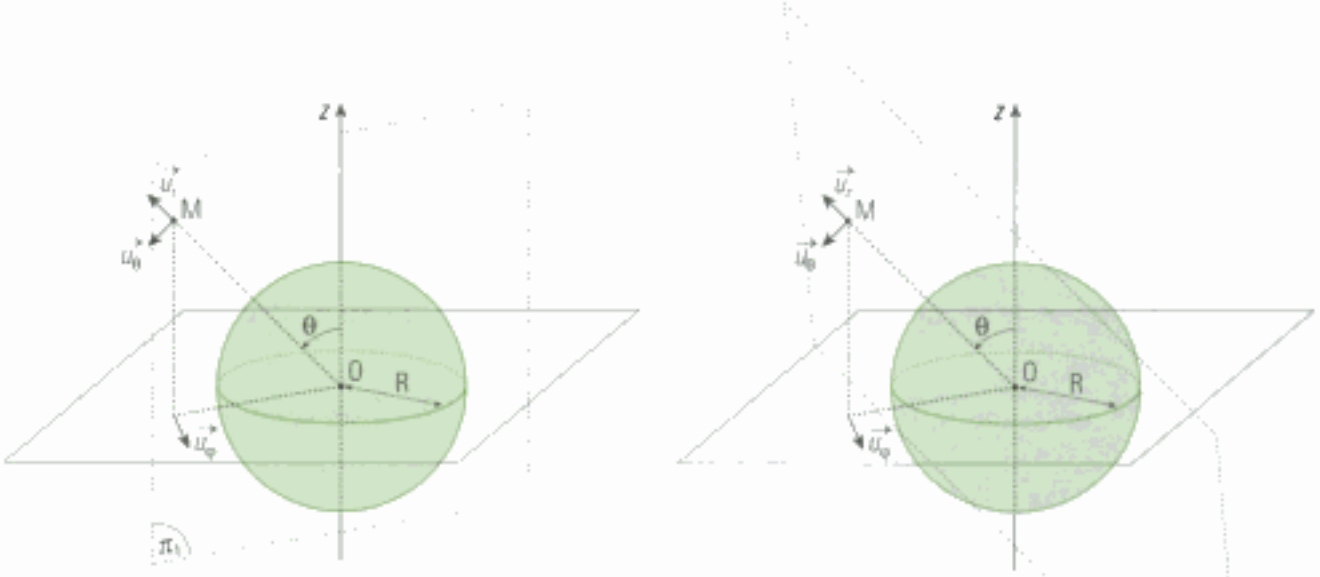
• La distribution de charges est à symétrie sphérique, on utilisera donc les coordonnées sphériques et les vecteurs de base associés $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$.

On étudie les symétries et invariances du champ électrique en un point M de l'espace. Les plans $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$, noté π_1 sur la figure, et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$, noté π_2 sur la figure, sont des plans de symétrie pour la distribution de charge. Donc le champ électrique est porté par la direction de la droite intersection des deux plans. $\vec{E}$ est dirigé selon $\vec{u}_r$.

La distribution de charge est invariante par les rotations d'angle θ et φ. Le champ électrique n'est alors fonction que de la variable r.

On obtient : $$\boldsymbol{\vec{E}(M) = E(r)\vec{u}_r}.$$

Copyright material



• Les plans $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$, $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ et $(O, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie de la distribution de charges. Le champ électrique $\vec{E}(O)$ appartient alors à ces trois plans. Ceci n'est possible que si le vecteur $\vec{E}(O)$ est nul puisque ces plans n'ont aucune direction commune :

$$\vec{E}(O) = \vec{0}.$$

• L'équation de Maxwell-Gauss permet de déterminer le champ électrique à partir de la densité volumique de charges : $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$.

On connaît la valeur du champ électrique au point O intérieur à la distribution de charge. On commence donc l'étude pour $r \leq R$.

En un point M tel que $r \leq R$, la densité volumique de charge est ρ. Alors :

$$\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Leftrightarrow \text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E)}{\partial r} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}.$$

On en déduit :

$$r^2E(r) = \frac{\rho}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{3} + K \text{ où K est une constante d'intégration.}$$

$E(r = 0) = 0$ donne $K = 0$.

On en conclut : $$\vec{E}(r \leq R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{u_r}.$$

En un point M tel que $r \geq R$, la densité volumique de charge est nulle. Alors :

$$\text{div}\vec{E} = 0 \Leftrightarrow \text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2E)}{\partial r} = 0.$$

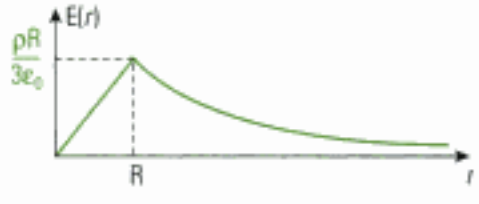
On en déduit :

$$r^2E(r) = K' \text{ où K' est une constante d'intégration.}$$

Le champ électrique est continu à l'interface car il n'y a pas de charge surfacique, donc :

$$R^2E(r = R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0} = K'.$$

On en conclut : $$\vec{E}(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\vec{u_r}.$$



Pour trouver l'expression de $\vec{E}$, on aurait pu utiliser le théorème de Gauss appliqué à des sphères de centre O et de rayon r. Le théorème de Gauss correspondant à la forme intégrale de l'équation de Maxwell-Gauss, il est équivalent ici de raisonner d'après l'équation locale ou d'après le théorème de Gauss.

Copyrighted material

➢ **On étudie ensuite le champ magnétique.**

On étudie d'abord les symétries et invariances du champ électrique qui est source du champ magnétique. On travaille toujours en coordonnées sphériques avec les vecteurs de base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_\varphi})$. Soit M un point quelconque de l'espace, les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\varphi})$ sont des plans de symétrie de la distribution de courant « de déplacement ». Le champ magnétique $\vec{B}(M)$ est alors normal à ces deux plans. Or, ces deux plans sont perpendiculaires. Donc, l'unique solution est :

$$\vec{B}(M) = \vec{0}.$$

2) On calcule la somme de l'énergie électromagnétique W_1 dans la sphère et l'énergie électromagnétique W_2 à l'extérieur de la sphère.

Par définition, $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$ est l'énergie volumique électromagnétique en un point.

• Pour $r \leq R$, $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\rho r}{3}\right)^2$.

Donc $W_1 = \iiint_{V_S} \frac{dW}{d\tau}\, d\tau$ où V_S représente le volume de la sphère et $d\tau = r^2 \sin^2\theta dr d\theta d\varphi$ est un volume élémentaire en coordonnées sphériques.

D'où $W_1 = \iiint_{V_S} \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\rho r}{3}\right)^2 r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi = \frac{\rho^2}{18\varepsilon_0}\int_0^R r^4 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$.

On obtient : $\mathbf{W_1 = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon_0}}$.

• Pour $r \geq R$, $\frac{dW}{d\tau} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\rho R^3}{3r^2}\right)^2$.

Donc : $W_2 = \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus V_S} \frac{dW}{d\tau}\, d\tau$.

D'où :

$$W_2 = \iiint_{\mathbb{R}^3 \setminus V_S} \frac{1}{2\varepsilon_0}\left(\frac{\rho R^3}{3r^2}\right)^2 r^2 \sin\theta\, dr d\theta d\varphi = \frac{\rho^2 R^6}{18\varepsilon_0}\int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi.$$

On obtient : $\mathbf{W_2 = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0}}$.

On en conclut que $W = W_1 + W_2 = \frac{2\pi\rho^2 R^5}{45\varepsilon_0} + \frac{2\pi\rho^2 R^5}{9\varepsilon_0}$.

D'où : $$\mathbf{W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}}.$$

3) a) dq représente la charge comprise dans la sphère creuse de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + dr$. Le volume de cette sphère creuse est $dV = r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 4\pi r^2 dr$.

Donc : $$\mathbf{dq = \rho 4\pi r'^2 dr}.$$

b) D'après le calcul de la question 1), $\vec{E}(r') = \frac{\rho r'^3}{3\varepsilon_0 r'^2}\vec{u_r}$.

La charge dq qui se trouve à la distance r' subit une force électrostatique :

$$\vec{F}(r') = dq\vec{E}(r') = dq\frac{\rho r'^3}{3\varepsilon_0 r'^2}.$$

c) Lorsque l'opérateur apporte la charge dq sur la sphère, le travail de cette force électrostatique est $dW_{ex} = \int_{r'=+\infty}^{r'=r} \vec{F}(r')\cdot d\vec{l}$ où $d\vec{l} = dr'\vec{u_r}$ représente le déplacement élémentaire pour se rapprocher de la sphère.

Donc : $$\mathbf{dW_{ex} = \int_{+\infty}^{r} dq\, \frac{\rho r'^3}{3\varepsilon_0 r'^2}\, dr' = -\, dq\, \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}}.$$

Copyright Material

⚠ Ce travail est bien entendu négatif puisque la force électrostatique est résistante (la sphère repousse la charge dq de même signe).

d) L'opérateur doit compenser les forces électrostatique et donc fournir le travail opposé.

D'où : $$\mathbf{dW_{op} = - dW_{es} = dq\ \frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0} = \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\varepsilon_0}\ dr.}$$

e) Pour construire entièrement cette sphère, l'opérateur doit fournir le travail nécessaire pour agréger toutes les calottes sphériques de rayon intérieur r et de rayon extérieur $r + dr$ en partant de $r = 0$ jusqu'à $r = R$.

Donc $W_{op} = \int dW_{op} = \int_0^R \frac{4\pi\rho^2 r^4}{3\varepsilon_0}\ dr$, et on obtient :

$$\mathbf{W = \frac{4\pi\rho^2 R^5}{15\varepsilon_0}}.$$

On retrouve l'énergie du champ électromagnétique de la distribution. Cette énergie provient donc de l'énergie fournie pour construire la distribution de charge.

L'énergie fournie pour construire la distribution se retrouve sous forme d'énergie électromagnétique.

Copyrighted material

CHAPITRE

3 Induction électromagnétique dans un circuit fixe

Introduction

La physique de l'induction électromagnétique est basée sur l'équation de Maxwell-Faraday, dans laquelle on voit apparaître que les variations temporelles du champ magnétique sont à l'origine d'une source de champ électrique. Ce champ électrique possède une circulation non conservative.

Les régimes varient en général suffisamment lentement pour que l'on puisse se placer dans le cadre de l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires, ce qui signifie que les phénomènes d'induction ne sont que « faiblement » variables.

On donnera tout d'abord les lois générales de l'induction, puis on étudiera le cas de l'auto-induction et de l'induction mutuelle dans les circuits, pour conclure par une application utilisée quotidiennement : le transformateur.

Plan du chapitre 3

A. Champ électromoteur 108

B. Force électromotrice induite 109

C. Auto-induction 112

D. Inductance mutuelle 114

E. Application : le transformateur 117

Méthodes

L'essentiel ; mise en œuvre 120

Énoncés des exercices 125

Indications 128

Solutions des exercices 129

Copyright Material

A. Champ électromoteur

On propose une démonstration des lois de l'induction électromagnétique à partir des équations de Maxwell. On rappelle celles qui seront utiles pour le raisonnement.

A.1. Les équations de Maxwell constitutives

L'équation de Maxwell-flux s'écrit $\text{div}\vec{B} = 0$, soit $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$.

On en a déduit[1] que le champ magnétique $\vec{B}$ dérive d'un champ de vecteurs $\vec{A}$ tel que $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ en tout point, soit :

$$\mathbf{B = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}}.$$

$\vec{A}$ est le potentiel vecteur de $\vec{B}$.

L'équation de Maxwell-Faraday a ensuite été réécrite en tenant compte du potentiel vecteur $\vec{A}$ du champ magnétique $\vec{B}$:

$$\overrightarrow{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{rot}\,\vec{A}), \text{ soit } \overrightarrow{rot}\left(\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = \vec{0}.$$

On en a déduit[2] qu'il existe un champ de scalaires V tel que $\vec{E} + \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{grad}V$, en tout point, soit :

$$\mathbf{\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}}.$$

V est le potentiel scalaire du champ électrique $\vec{E}$.

1. Voir chapitre 1 §G.2 Propriété 8.

2. Voir chapitre 1 §G.2 Propriété 7.

A.2. Circulation du champ électrique et définition

On considère un contour (ligne fermée) Γ, le long de laquelle on calcule la circulation du champ électrique $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$ en régime variable.

$$\oint_\Gamma \vec{E}\cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma -\overrightarrow{grad}V\cdot d\vec{l} + \oint_\Gamma -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = \oint_\Gamma -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\cdot d\vec{l},$$

un gradient étant à circulation conservative[3] :

$$\oint_\Gamma -\overrightarrow{grad}V\cdot d\vec{l} = \oint_\Gamma -dV = 0.$$

3. Voir chapitre 1 §C.3. Propriété 1.

On définit le champ électromoteur d'induction de la manière suivante :

Définition 1

Le **champ électromoteur d'induction** $\vec{E}_m$ est défini par la partie du champ électrique $\vec{E}$ qui n'est pas *a priori* à circulation conservative :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}.$$

On parle du champ électromoteur « de Neumann »[4] pour spécifier que son existence est liée aux variations temporelles du champ magnétique[5].

4. John Von Neumann (1903-1957) était un physicien hongrois dont les principaux travaux ont porté sur l'intelligence artificielle. Il a construit à Princeton vers 1950 le premier ordinateur flexible.

5. On verra dans le prochain chapitre le champ électromoteur « de Lorentz » lié au mouvement d'un conducteur dans un champ magnétique.

Copyrighted material

B. Force électromotrice induite

B.1. Résistance électrique

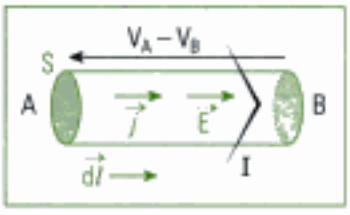


Fig. 1 - Conducteur de section S.

On considère une portion de circuit se trouvant entre les points A et B (fig. 1). Elle est constituée de conducteur pour lequel on peut écrire la loi d'Ohm locale :

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}.$$

Cette loi d'Ohm locale permet de définir le concept de résistance et d'écrire la loi d'Ohm macroscopique.

En effet, l'intensité I du courant qui traverse le conducteur s'écrit :

$$I = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S},$$

où S est une section du conducteur.

En régime continu, la différence de potentiel entre A et B vaut :

$$V_A - V_B = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} \text{ car } \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}.$$

$$= \int_A^B \frac{\vec{j} \cdot d\vec{l}}{\gamma} \qquad \text{(loi d'Ohm locale)}$$

$$= \int_A^B \frac{j\, dl}{\gamma} = \int_A^B \frac{I dl}{S\gamma} \qquad (\vec{j} \text{ et } d\vec{l} \text{ sont supposés colinéaires et } I = j \cdot S)$$

$$= R_{AB} I, \text{ avec } R_{AB} = \int_A^B \frac{dl}{S\gamma} \text{ résistance électrique du circuit } \overset{\frown}{AB}.$$

En **régime continu, la résistance électrique R_{AB} du circuit $\overset{\frown}{AB}$** est définie comme le rapport de la différence de potentiel entre les points A et B et l'intensité I qui traverse le conducteur :

$$R_{AB} = \frac{V_A - V_B}{I} = \frac{\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}}{\iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}} = \int_A^B \frac{dl}{S\gamma},$$

où γ est la conductivité et S la section du conducteur.

1. On peut appeler $dR = \frac{dl}{\gamma S}$ la résistance de la longueur élémentaire dl.

B.2. Définition

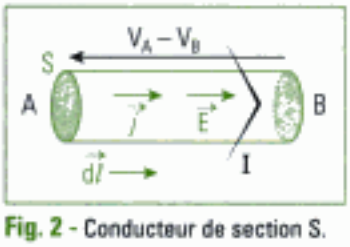


Fig. 2 - Conducteur de section S.

2. Le sens de calcul de la circulation détermine le sens conventionnel du courant, ici de A vers B.

De manière générale, l'intensité I entre les deux points A et B est donnée par la relation (fig. 2) :

$$R_{AB} I = R_{AB} \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}\,^{2}.$$

C'est cette expression qui définit l'intensité, même en régime variable, car c'est le champ électrique $\vec{E}$ qui met les charges électriques en mouvement et qui crée donc l'intensité I.

En régime variable, on a :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\overrightarrow{\text{grad}}V + \vec{E}_m, \text{ donc :}$$

$$R_{AB} I = \int_A^B -\overrightarrow{\text{grad}}V \cdot d\vec{l} + \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = V_A - V_B + e,$$

avec e défini comme suit :

Copyrighted material

1. On trouve souvent l'abréviation fem ou fém pour force électromotrice.

2. e est une force électromotrice induite comptée positivement si $\vec{E}_m$ tend à faire circuler un courant positif.

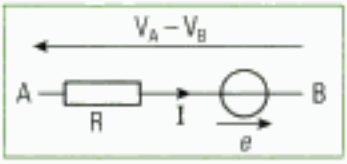


Fig. 3 - Schéma équivalent du circuit AB. La flèche de la tension $V_A - V_B$ va de B vers A.

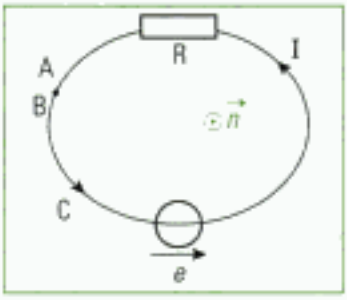


Fig. 4 - Schéma équivalent du contour C.

3. Michael Faraday (1791-1867) était un physicien anglais dont les principaux travaux concernèrent l'électromagnétisme. Il montra le fonctionnement de l'électrisation des conducteur (cage de Faraday), mit en évidence l'induction électromagnétique dès 1831 (loi de Faraday) et découvrit l'effet de champs magnétiques forts sur la rotation de la polarisation d'une onde lumineuse (effet Faraday).

4. Le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ est à flux conservatif, son flux $\phi(t)$ dépend alors uniquement du temps et pas de la surface S, c'est pourquoi la dérivée devient droite.

5. L'unité du flux magnétique est le Weber de symbole Wb.

6. Le circuit n'est alors pas nécessairement fixe dans un champ magnétique variable, mais peut aussi être mobile dans un champ magnétique uniforme.

7. Cette propriété sera démontrée dans le prochain chapitre.

8. La loi de Lenz traduit une modération et est exprimée par le signe négatif de la loi de Faraday $e = -\frac{d\phi}{dt}$: la force électromotrice d'induction e s'oppose aux variations du flux appliqué.

Définition 3

La **force électromotrice d'induction**[1] e qui apparaît entre les points A et B est donnée par l'expression :

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}\ ^{[2]}.$$

On a alors : $$V_A - V_B = R_{AB} I - e.$$

Le générateur de force électromotrice e est fléché dans le sens du courant car la partie du circuit $\overset{\frown}{AB}$ a été notée en convention récepteur (fig. 3).

B.3. Cas d'un circuit fermé : loi de Faraday[3]

Le circuit reste indéformable, fixe et est constitué par un contour C (ligne fermée), sur lequel s'appuie une surface S (fig. 4). L'expression de la force électromotrice induite e devient :

$$e = \oint_C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\oint_C \vec{A}\cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}\cdot d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{d\phi}{dt}\ ^{[4]},$$

où ϕ désigne le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers S[5].

Loi 1

Loi de Faraday

La force électromotrice d'induction e qui apparaît dans un circuit fermé C est donnée par la relation :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS,$$

où ϕ désigne le flux du champ magnétique à travers C.

Le sens de la force électromotrice (sens de la flèche du générateur) est le même que celui du contour C (fig. 5).

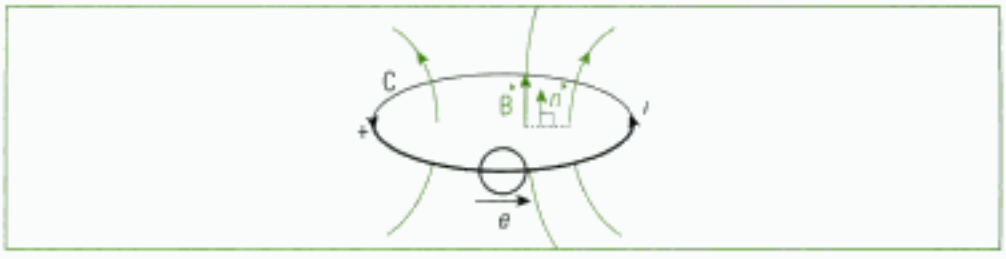


Fig. 5 - Flux magnétique ϕ à travers le circuit C.

La loi de Faraday peut être appliquée dès qu'un circuit est traversé par un flux magnétique variable.

B.4. Lois qualitatives

Ce sont des lois qualitatives qui permettent d'évaluer les conditions de l'induction électromagnétique :

Loi 2

i) Tout conducteur mobile dans un champ magnétique $\vec{B}$ est le siège d'une force électromotrice d'induction e[7].

ii) Tout circuit fermé plongé dans un flux magnétique variable est le siège d'une force électromotrice d'induction e.

iii) La force électromotrice induite e a un signe tel que ses effets tendent à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance : c'est la **loi de Lenz**[8].

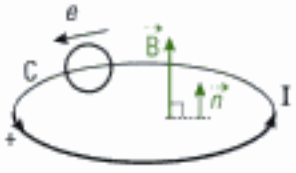
Application 1 **Loi de Lenz dans un circuit**

Trouver le sens de l'intensité du courant induit dans le circuit C fixe de résistance R schématisé ci-contre, sachant que la norme B(t) du champ magnétique inducteur $\vec{B}$ uniforme et orthogonal à la surface du circuit est une fonction croissante du temps. Vérifier ce résultat grâce à la loi de Lenz.



Solution

On oriente le circuit de façon à ce que la normale $\vec{n}$ au circuit C soit colinéaire et de même sens que $\vec{B}$. On donne ainsi l'orientation du courant induit I susceptible de traverser le circuit et de la flèche du générateur de tension représentant la force électromotrice d'induction e (la même que le circuit C).



On applique la loi de Faraday, en accordant une attention particulière aux signes des grandeurs trouvées.

Le flux magnétique s'écrit : $\phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = BS > 0$,

où S est une surface s'appuyant sur le contour C.

La force électromotrice d'induction e peut alors être calculée :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -S\frac{dB}{dt} < 0, \text{ car B est une fonction croissante du temps.}$$

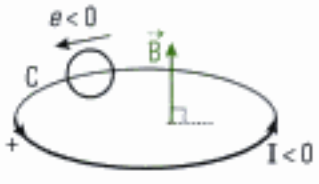
D'après la définition 1 du § B.2., on a :

$$V_A - V_B = RI - e, \text{ avec les points A et B confondus.}$$

Il vient donc $I = \frac{e}{R} < 0$.

En conséquence, le sens du courant induit est contraire au sens conventionnel (positif) choisi.

Vérifions ce résultat en utilisant la loi de Lenz. La force électromotrice e induite admet un signe négatif et engendre ainsi une intensité I induite négative. Ce courant induit d'intensité I négative créée alors un flux propre $\phi_p < 0$ qui s'oppose bien à la variation positive du flux appliqué $\frac{d\phi}{dt} > 0$. La loi de Lenz est donc bien vérifiée.



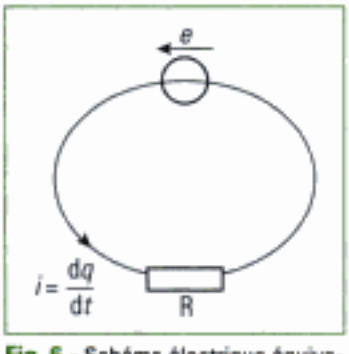


Fig. 6 - Schéma électrique équivalent.

B.5. Quantité d'électricité induite

On calcule la quantité d'électricité, c'est-à-dire la charge Q, qui a circulé dans un circuit fermé (fig. 6) suite aux phénomènes d'induction électromagnétique dont il a été le siège. Soit R la résistance[1] totale du circuit, i l'intensité du courant induit qui le traverse, et q la charge électrique liée à i : on pose donc $i = \frac{dq}{dt}$ [2].

Le circuit est fermé, donc la loi des mailles donne :

$$Ri - e = 0.$$

Or on sait que $e = -\frac{d\phi}{dt}$, que l'on injecte dans l'équation précédente :

$$R\frac{dq}{dt} = -\frac{d\phi}{dt}, \text{ soit } dq = -\frac{1}{R}d\phi,$$

et enfin, en intégrant entre l'état initial « i » et l'état final « f » :

Propriété 1

La charge électrique Q qui a circulé dans le circuit du fait des phénomènes d'induction s'écrit :

$$Q = \int_i^f dq = -\frac{1}{R}(\phi_f - \phi_i) = -\frac{1}{R}\Delta\phi.$$

1. On suppose qu'il n'y a qu'une résistance.

2. Il ne s'agit pas nécessairement de l'intensité totale, un générateur pouvant être présent. On ne s'intéresse qu'à la partie du courant qui existe du fait de l'induction. C'est une application du théorème de superposition.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Le champ magnétique n'est non nul qu'à l'intérieur du solénoïde et la densité volumique d'énergie du champ est :

$$\frac{dW'}{d\tau} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Comme le champ électrique est nul et que la densité volumique d'énergie magnétique est uniforme dans le solénoïde, l'énergie W' du champ électromagnétique vaut :

$$W' = \frac{dW'}{d\tau}\,\tau = \frac{\left(\mu_0 \frac{N^2}{d} i\right)^2}{2\mu_0} Sd = \frac{1}{2}\mu_0 \frac{N^2}{d} Si^2 = \frac{1}{2} Li^2 = W.$$

On a retrouvé l'expression de l'énergie emmagasinée dans le bobinage.

L'énergie électromagnétique emmagasinée par le circuit est donc localisée dans l'espace du bobinage qui constitue ce circuit.

C.6. Continuité du courant

L'existence de cette énergie emmagasinée interdit les discontinuités de courant.

En effet, l'énergie emmagasinée est proportionnelle à i^2. Si une discontinuité de courant avait lieu, l'intensité passant de la valeur i_1 à la valeur i_2 pendant une durée nulle, alors cette discontinuité de courant s'accompagnerait d'une dissipation instantanée d'énergie :

$$\Delta W = \frac{1}{2} Li_2^2 - \frac{1}{2} Li_1^2,$$

qui supposerait une puissance $P = \frac{\Delta W}{\partial t}$, avec $\Delta W \neq 0$ et $\partial t = 0$. Cette puissance serait infinie, et on met ainsi en évidence la continuité du courant.

Propriété 4

Dans un circuit où se trouve une inductance L, l'intensité ne peut subir de discontinuité. **On dit que l'auto-induction lisse les courants**[1].

1. On le constate grâce à la présence d'une étincelle de rupture au niveau de l'interrupteur lorsque l'on ouvre un circuit dans lequel se trouve un composant inductif. L'étincelle permet au courant de s'annuler de manière continue.

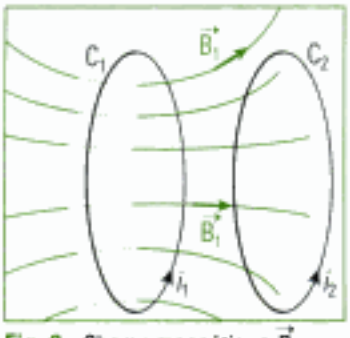


Fig. 9 - Champ magnétique $\vec{B}_1$ créé par le circuit C_1.

D. Inductance mutuelle

On considère un ensemble de deux circuits C_1 et C_2 parcourus par des courants électriques d'intensité respective i_1 et i_2 (fig. 9). Le circuit C_1 crée dans tout l'espace un champ magnétique $\vec{B}_1$, de sorte que le circuit C_2 se trouve traversé par un flux magnétique du champ créé par le circuit C_1. Un phénomène d'induction se produit alors.

D.1. Coefficient d'inductance mutuelle

Le circuit C_1 crée dans tout l'espace un champ magnétique $\vec{B}_1$ dont la norme est proportionnelle à l'intensité i_1[2].

Il crée donc, par l'intermédiaire de $\vec{B}_1$, un flux magnétique $\phi_{1\to2}$ à travers une surface S_2 qui s'appuie sur le circuit C_2[3] :

$$\phi_{1\to2} = \iint_{M\in S_2} \vec{B}_1(M)\cdot\vec{n}_2 dS = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \iint_{M\in S_2} \left(\oint_{P\in C_1} \frac{\vec{dl}\wedge\vec{PM}}{PM^3} \right)\cdot\vec{n}_2 dS^4.$$

Ce flux est donc proportionnel à i_1.

2. Voir § C.1. pour la justification (démarche identique).

3. On utilise souvent le vocabulaire « flux à travers le circuit C_2 », justifié par le fait que le champ magnétique est à flux conservatif (voir chapitre 1 §D.4.).

4. Il n'est pas question de calculer les intégrales. On veut seulement montrer la proportionnalité avec l'intensité.

Copyrighted material

Hidden page

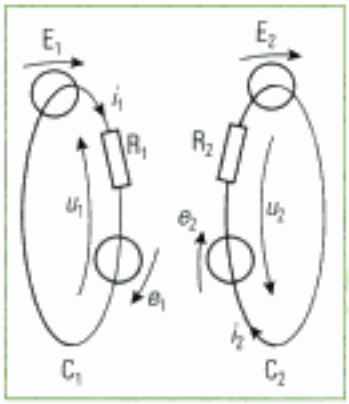


Fig. 10 - Modèle électrique équivalent.

$$u_1 = E_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} . \quad (1)$$

En prenant des notations analogues pour le circuit C_2, on écrit de même :

$$u_2 = E_2 = R_2 i_2 - e_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} . \quad (2)$$

D.4. Bilan énergétique

Pour avoir le bilan des puissances, on multiplie par i_1 l'équation (1) et par i_2 l'équation (2). Il vient :

$$u_1 i_1 = R_1 i_1^2 - e_1 i_1 = R_1 i_1^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right) + M i_1 \frac{di_2}{dt} ,$$

$$u_2 i_2 = R_2 i_2^2 - e_2 i_2 = R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2\right) + M i_2 \frac{di_1}{dt} .$$

Ajoutons membre à membre ces deux équations. On obtient :

$$\boldsymbol{u_1 i_1 + u_2 i_2 = R_1 i_1^2 + R_2 i_2^2 + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2\right) + \frac{d}{dt}(M i_1 i_2).}$$

Pour effectuer un bilan énergétique entre deux instants consécutifs t et $t + dt$, il reste à multiplier par dt cette dernière équation :

$$u_1 i_1 dt + u_2 i_2 dt = R_1 i_1^2 dt + R_2 i_2^2 dt + d\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right) + d\left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2\right) + d(M i_1 i_2).$$

1. En effet, les notations ont été faites en convention récepteur.

Cette énergie $u_1 i_1 dt + u_2 i_2 dt$ a été reçue par l'ensemble des deux circuits[1], à l'exception des générateurs. C'est d'ailleurs aussi l'énergie fournie par ces générateurs aux circuits entre les instants t et $t + dt$.

L'énergie $u_1 i_1 dt + u_2 i_2 dt$ fournie par les deux générateurs aux circuits est répartie de la manière suivante :

2. Cela se fait indépendamment de la présence de l'autre circuit, comme le montre l'étude du paragraphe précédent.

- Les résistances de chaque circuit C_1 et C_2 absorbent l'énergie $R_1 i_1^2 dt + R_2 i_2^2 dt$ qui est immédiatement restituée à l'extérieur sous forme d'effet Joule.

- Chaque circuit C_1 et C_2 emmagasine respectivement l'énergie magnétique :

$$d\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right) \text{ et } d\left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2\right)[2].$$

- Enfin, le couplage magnétique entre les deux circuits engendre une énergie $d(M i_1 i_2)$ emmagasinée par l'ensemble des deux circuits en interaction l'un avec l'autre.

Propriété 5

Les énergies $\frac{1}{2} L_1 i_1^2$ et $\frac{1}{2} L_2 i_2^2$ sont respectivement les énergies propres emmagasinées par chaque circuit C_1 et C_2.

L'énergie $M i_1 i_2$ est l'énergie emmagasinée par l'ensemble des deux circuits en interaction l'un avec l'autre.

Copyrighted material

1. En filière PSI, le cours de conversion de puissance aborde plus en détails l'étude du transformateur.

E. Application : le transformateur[1]

E.1. Définition

Un transformateur est constitué par deux bobinages, appelés respectivement primaire et secondaire, enroulés autour d'un tore de matériau ferromagnétique (fig. 11).

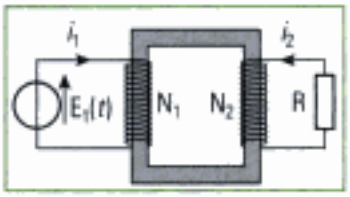


Fig. 11 - Transformteur. On fera attention à appliquer les conventions de courants employées ci-dessus.

L'intérêt du tore est de canaliser les lignes de champ du champ magnétique créé par le primaire, afin que ces lignes de champ traversent en totalité le secondaire : l'induction mutuelle y est alors la plus importante possible.

On note C_1 et C_2 respectivement les circuits primaire et secondaire, R_1 et R_2 leur résistance respective, L_1 et L_2 leur inductance propre respective, N_1 et N_2 leur nombre de spires respectif, et M le coefficient de mutuelle.

Le primaire contient un générateur de force électromotrice $E_1(t)$ qui impose une intensité dont la valeur est i_1.

Aux bornes du secondaire est placé un récepteur modélisé ici par une résistance R. On note i_2 l'intensité du courant dans le secondaire.

Il y a auto-induction dans chaque circuit, et induction mutuelle entre eux. On note e_1 et e_2 leur force électromotrice d'induction respective et qui tient compte des deux phénomènes (fig. 12).

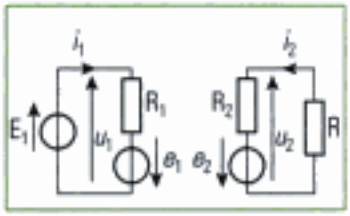


Fig. 12 - Schéma électrique équivalent.

E.2. Équations constitutives et modèle parfait

On écrit la loi des mailles pour le primaire et le secondaire, les notations courant-tension aux bornes des bobinages étant prises en convention récepteur :

$$\begin{cases} u_1 = E_1 = R_1 i_1 - e_1 = R_1 i_1 + L_1 \dfrac{di_1}{dt} + M \dfrac{di_2}{dt} \\ u_2 = -Ri_2 = R_2 i_2 - e_2 = R_2 i_2 + L_2 \dfrac{di_2}{dt} + M \dfrac{di_1}{dt} \end{cases}$$

Ce sont les **équations constitutives du transformateur**.

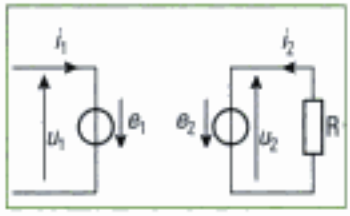


Fig. 13 - Schéma électrique équivalent d'un transformateur parfait.

2. Cela revient à négliger les tensions aux bornes des résistances devant les autres tensions. On ne tient alors plus compte des résistances R_1 et R_2.

Définition 7

Le **transformateur** est dit **parfait** (fig. 13) si deux hypothèses sont réalisées :

– l'effet des résistances des bobinages est négligeable[2].

– les expressions des coefficients L_1, L_2 et M s'expriment en fonction d'un coefficient k de la manière suivante :

$$M = kN_1N_2, \quad L_1 = kN_1^2, \quad L_2 = kN_2^2.$$

La dernière hypothèse correspond à une absence de fuites magnétiques : toutes les lignes de champ magnétique qui traversent le primaire traversent aussi le secondaire (fig. 14). Cela est possible si un noyau de ferromagnétique fermé enserre les deux circuits.

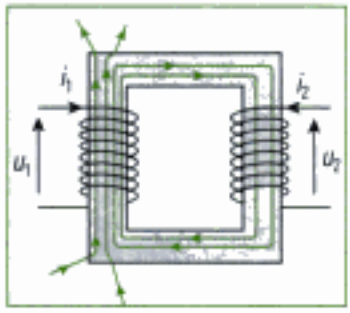


Fig. 14 - Dans un transformateur non parfait, les lignes du champ magnétique (ici représentées en vert) sortent du tore et le flux magnétique n'est alors pas le même partout à l'intérieur du tore.

Les équations constitutives s'écrivent alors :

$$u_1 = -e_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt},$$

$$u_2 = -e_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} = -Ri_2.$$

Copyright Matériel

On se place dans toute la suite dans le cas où le primaire est alimenté en régime sinusoïdal de pulsation ω et on se limite à l'étude de ce régime sinusoïdal forcé.

En utilisant la notation complexe, $\underline{u}$ désignant le complexe dont la partie réelle est la tension $u(t)$, les équations du transformateur idéal sont linéaires. Le passage aux complexes permet de remplacer la dérivée par rapport au temps par une simple multiplication par $j\omega$:

$$\underline{u}_1 = j\omega(L_1 i_1 + M i_2),$$
$$\underline{u}_2 = j\omega(L_2 i_2 + M i_1).$$

E.3. Transformateur idéal de tension

On a vu dans le paragraphe précédent que :

$$M = kN_1N_2,\ L_1 = kN_1^2,\ L_2 = kN_2^2.$$

Les flux magnétiques à travers le primaire φ_1 et le secondaire φ_2 s'écrivent :

$$\varphi_1 = L_1 i_1 + M i_2 = kN_1^2 i_1 + kN_1N_2 i_2$$

et $$\varphi_2 = L_2 i_2 + M i_1 = kN_2^2 i_2 + kN_1N_2 i_1.$$

De ce fait, les flux à travers une section du bobinage primaire Φ_1 et du bobinage secondaire Φ_2 s'écrivent :

$$\Phi_1 = \frac{L_1 i_1 + M i_2}{N_1} = kN_1 i_1 + kN_2 i_2$$

et $$\Phi_2 = \frac{L_2 i_2 + M i_1}{N_2} = kN_2 i_2 + kN_1 i_1.$$

On observe que :

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi.$$

Cela s'explique par le fait que le flux magnétique est le même à travers toute section du tore ferromagnétique car celui-ci canalise parfaitement les lignes du champ magnétique.

Les forces électromotrices induites dans le bobinage primaire e_1 et dans le bobinage secondaire e_2 sont égales à :

$$e_1 = -N_1 \frac{d\Phi}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$$ [1].

On trouve alors pour un transformateur parfait :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{e_2}{e_1} = \frac{N_2}{N_1} = m,$$

où m désigne le rapport de transformation.

On note U_1 et U_2 les valeurs efficaces des tensions aux bornes du primaire et du secondaire, il vient :

Propriété 6

Le rapport de transformation de tension du transformateur parfait s'écrit :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = m,$$ [2]

où ***m* désigne le rapport de transformation.**

On dit que le transformateur se comporte comme un **transformateur idéal de tension.**

1. Faire attention à la convention d'orientation des bobinages pour le primaire et le secondaire (le flux permet d'orienter les bobinages grâce à la règle du tire-bouchon) (fig. 15).

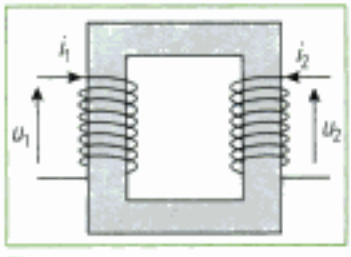


Fig. 15 - Convention d'orientation des bobinages.

2. On a alors : $\begin{cases} M = mL_1 \\ L_2 = m^2 L_1 \end{cases}$

Copyrighted material

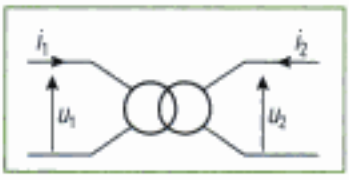


Fig. 16 - Symbole du transformateur parfait de rapport de transformation m.

Le transformateur permet donc d'élever ou d'abaisser la valeur efficace d'une tension. EDF utilise cette propriété pour distribuer son énergie dans tout le réseau. Le transport de l'énergie se fait par des lignes à haute tension pour réduire les pertes par effet Joule, du fait que le courant est plus faible. Il faut donc un transformateur « élévateur de tension » sur le site de production, et un transformateur « abaisseur de tension » sur le site de consommation.

Remarque

Le résultat $\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = m$ reste vérifié si la résistance R devient infinie, ce qui revient à prendre l'intensité nulle dans le secondaire : $i_2 = 0$. Les équations donnent alors :

$$\underline{u}_1 = j\omega L_1 \underline{i}_1 \text{, } \underline{u}_2 = j\omega M \underline{i}_1 \text{ et par suite : } \frac{\underline{u}_2}{\underline{u}_1} = \frac{M}{L_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

C'est une solution facile pour retrouver le rapport de transformation.

E.4. Transformateur idéal de courant

Lorsque la résistance au secondaire est très faible, tout se passe comme si on avait R = 0, c'est-à-dire $u_2 = 0$.

La loi des mailles aux bornes du secondaire s'écrit alors :

$$\underline{u}_2 = 0 = j\omega(L_2 \underline{i}_2 + M \underline{i}_1), \text{ soit } \frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = \frac{M}{L_2} = -\frac{N_1}{N_2} = -\frac{1}{m}.$$

Cette dernière relation reste valable pour $R < +\infty$. En notant I_1 et I_2 les valeurs efficaces des intensités des courants traversant le primaire et le secondaire, on obtient :

Propriété 7

Le rapport de transformation de courant du transformateur parfait s'écrit :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{1}{m},$$

où m désigne le rapport de transformation.

On dit que le transformateur se comporte comme un **transformateur idéal de courant**.

Le transformateur permet d'élever ou d'abaisser la valeur efficace d'un courant. Ce mode de fonctionnement est utilisé par exemple pour mesurer les courants de fortes intensités. Les ampèremètres usuels ne supportent pas d'intensité supérieure à 10 A. Pour pouvoir mesurer de fortes intensités électriques, on fait alors appel à un transformateur qu'on nomme « abaisseur de courant » en plaçant l'ampèremètre sur le secondaire : c'est le principe des pinces ampèremétriques.

Remarque

La puissance reçue dans le bobinage primaire est : $p_1 = u_1 i_1$ tandis que celle fournie par le bobinage secondaire est : $p_2 = -u_2 i_2$. On voit donc en se servant des relations précédentes que $p_1 = p_2$:

Le transformateur parfait transmet intégralement l'énergie du circuit primaire au secondaire.

Copyrighted material

L'essentiel

✓ Force électromotrice d'induction

• Le **champ électromoteur** $\vec{E}_m$ est défini par la relation :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}.$$

• La **force électromotrice d'induction** e entre deux points A et B s'écrit :

$$e = \int_A^B \vec{E}_m \cdot d\vec{l}.$$

e est algébrique et se calcule pour un circuit ouvert ou fermé.

La flèche du générateur est orientée de A vers B le long du parcours AB, c'est-à-dire dans le sens de la circulation et de l'intensité.

• La **loi de Faraday** s'écrit pour un circuit fermé :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS,$$

où S est « la surface » du circuit et ϕ le flux magnétique. La flèche du générateur est orientée dans le même sens que le circuit.

• La **loi de Lenz** énonce que la force électromotrice induite a un signe tel que ses effets tendent à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance.

✓ Auto-induction

• La **force électromotrice d'auto-induction** e d'un circuit s'écrit :

$$e = -\frac{d\phi_p}{dt} = -L\frac{di}{dt},$$

où ϕ_p, L et i sont respectivement le flux propre, l'inductance propre et l'intensité du circuit.

• L'**énergie totale d'auto-induction emmagasinée** dans un circuit est :

$$\frac{1}{2}Li^2.$$

✓ Inductance mutuelle

• Le **coefficient de mutuelle** M entre deux circuits (1) et (2) est défini par les relations :

$$\phi_{1\to 2} = Mi_1 \quad \text{et} \quad \phi_{2\to 1} = Mi_2,$$

où $\phi_{\alpha\to\beta}$ correspond au flux créé par le circuit (α) à travers le circuit (β), et i_α l'intensité parcourant le circuit (α).

• Les **forces électromotrices d'induction mutuelle** s'écrivent pour chaque circuit :

$$e_1 = -M\frac{di_2}{dt} \quad \text{et} \quad e_2 = -M\frac{di_1}{dt}.$$

• L'énergie d'induction mutuelle est : Mi_1i_2.

✓ Transformateur parfait

• Le rapport de transformation de tension s'écrit :

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1},$$

où N_α et U_α désignent respectivement le nombre de spires du circuit (α) et la tension efficace au bornes de celui-ci.

Copyrighted material

On dit alors que le transformateur se comporte comme un **transformateur idéal de tension**.

• Le rapport de transformation de courant s'écrit :

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{N_1}{N_2},$$

où N_α et I_α désignent respectivement le nombre de spires du circuit (α) et l'intensité traversant celui-ci.

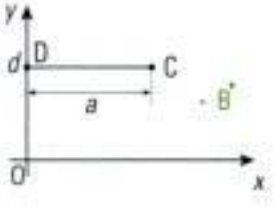
On dit alors que le transformateur se comporte comme un **transformateur idéal de courant**.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment calculer une différence de potentiel dans un circuit ouvert et placé dans un champ magnétique variable ?

Dans un repère cartésien, exprimer la différence de potentiel $V_D - V_C$ que l'on mesure aux bornes d'un barreau conducteur rectiligne placé entre les points D(0, d ,0) et C(a, d, 0) et plongé dans un champ magnétique uniforme et variable $\vec{B} = \alpha t \vec{u}_z$ (α est une constante).



On vérifiera que le potentiel vecteur en un point M(x, y, z) quelconque peut s'écrire $\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}}{2}$.

→ Savoir faire

❶ Lorsque le circuit est ouvert, la loi de Faraday ne peut pas être utilisée et il faut calculer le champ électromoteur $\vec{E}_m$. On doit alors déterminer l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}$. Conformément au programme, l'énoncé apporte généralement une aide pour ce calcul.

❷ En déduire l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m$.

❸ Calculer la circulation du champ électromoteur $\vec{E}_m$ entre les deux points D et C, qui représente la force électromotrice d'induction e.

❹ Représenter le schéma électrique équivalent entre les deux points en plaçant le générateur dont la force électromotrice e a été calculée en ❸.

❺ Appliquer la loi des mailles pour déterminer la différence de potentiel $V_D - V_C$.

→ Application

❶ On calcule le potentiel vecteur $\vec{A}$ proposé, puis on vérifiera qu'il est bien potentiel vecteur du champ magnétique $\vec{B}$.

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}}{2} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-yB\\xB\\0\end{pmatrix}.$$

Copyright

Vérifions que cette expression est bien un potentiel vecteur du champ $\vec{B}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{yB}{2} \\ \frac{xB}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \end{pmatrix} = \vec{B}.$$

$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}}{2}$ est donc bien le potentiel vecteur du champ magnétique $\vec{B}$.

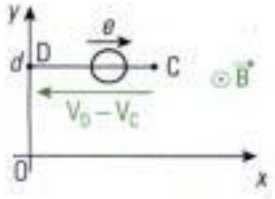
❷ Le champ électromoteur $\vec{E}_m$ est défini par :

$$\vec{E}_m = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha y}{2} \\ -\frac{\alpha x}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

❸ On calcule la circulation de ce champ électromoteur $\vec{E}_m$ entre les deux points D et C ($d\vec{l}$ va de D vers C) et on obtient la force électromotrice d'induction e :

$$e = \int_D^C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^a \begin{pmatrix} \frac{\alpha y}{2} \\ -\frac{\alpha x}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^a \frac{\alpha d}{2}\, dx = \frac{\alpha d a}{2}.$$

❹ Le schéma doit faire apparaître un générateur correspondant à la force électromotrice d'induction et dont la flèche est orientée dans le sens du calcul de la circulation.



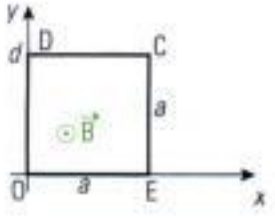
❺ On applique la loi des mailles, sachant que le circuit est ouvert. Il n'est donc parcouru par aucun courant et on a :

$$V_D - V_C = -e = -\frac{\alpha d a}{2}.$$

Méthode n° 2

Comment calculer la force électromotrice d'induction *e* qui apparaît dans un circuit fermé placé dans un champ magnétique variable ?

Exprimer la force électromotrice d'induction e qui apparaît dans un circuit OECD carré de coté a du plan Oxy (figure ci-contre). Ce circuit est plongé dans un champ magnétique uniforme et variable $\vec{B} = \alpha t \vec{u}_z$, où α est une constante.



Copyrighted material

→ Savoir faire

❶ Calculer le flux ϕ du champ magnétique à travers ce circuit. Repérer le sens de la normale $\vec{n}$ choisie et noter le sens positif du courant associé.

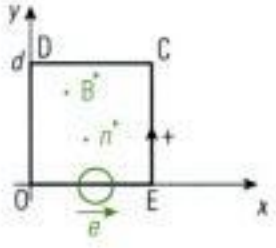
❷ Calculer la force électromotrice e d'induction avec la loi de Faraday.

→ Application

❶ On prend comme surface celle du circuit. Celui-ci est très généralement plan et il délimite une surface plane, ici carrée de coté a. On oriente la normale $\vec{n}$ à la surface dans le sens du champ magnétique $\vec{B}$. On donne de fait un sens conventionnel de parcours dans le circuit, lié au choix de la normale via la « règle du tire-bouchon ».

Le flux magnétique s'écrit alors :

$$\phi = \iint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = B \times S = a^2\alpha t, \text{ car } \vec{B} \text{ est uniforme.}$$



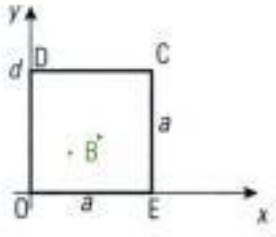
❷ On en déduit la force électromotrice d'induction e en appliquant la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(a^2\alpha t) = -a^2\alpha < 0.$$

Méthode n° 3

Comment calculer l'intensité i du courant induit qui circule dans un circuit fermé placé dans un champ magnétique variable ?

Exprimer l'intensité i du courant induit qui circule dans un circuit OECD carré de coté a du plan Oxy (figure ci-contre). Ce circuit a pour résistance R et est plongé dans un champ magnétique uniforme et variable $\vec{B} = \alpha t\,\vec{u}_z$, où α est une constante.



→ Savoir faire

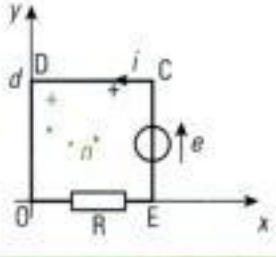
❶ Calculer la force électromotrice d'induction e qui apparaît dans le circuit (voir méthode n° 2).

❷ Représenter le schéma électrique équivalent du circuit en y faisant figurer la force électromotrice d'induction e. Le sens de la flèche du générateur doit être conforme au sens choisi conventionnellement pour le calcul de la force électromotrice d'induction e. Appliquer la loi des mailles pour trouver l'intensité i.

→ Application

❶ On reprend le résultat de la méthode n° 2, en n'oubliant pas le sens de la normale. On rappelle le résultat $e = -a^2\alpha < 0$.

❷ On place le générateur de force électromotrice e sur une des branches du circuit fermé, en prenant soin d'orienter la flèche du générateur dans le sens positif conventionnellement choisi. Le sens intensité est toujours choisi identique à celui du circuit.



Copyrighted

Il reste à appliquer la loi des mailles dans le circuit :

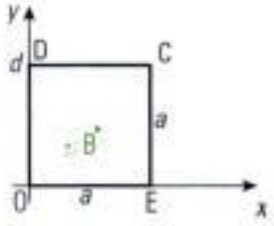
$$e - Ri = 0, \text{ qui donne } i = \frac{e}{R} = \frac{-a^2\alpha}{R} < 0.$$

L'intensité véritable circule donc dans le sens contraire au sens conventionnel choisi.

Méthode n° 4

Comment vérifier sans calcul le sens de l'intensité *i* du courant induit qui circule dans un circuit fermé placé dans un champ magnétique variable ?

Déterminer le sens de l'intensité i du courant induit qui circule dans un circuit OECD carré de coté a du plan Oxy (figure ci-contre). Ce circuit a pour résistance R et est plongé dans un champ magnétique uniforme et variable $\vec{B} = \alpha t \vec{u}_z$, où α est une constante.



→ Savoir faire

❶ L'induction est provoquée par la variation du flux magnétique ϕ à travers le circuit. Trouver le sens de cette variation.

❷ Le courant induit i a un sens tel qu'il crée un champ magnétique $\vec{B}'$ dont le flux s'oppose à la variation du champ inducteur. Trouver le sens du champ magnétique $\vec{B}'$ créé par le courant induit i.

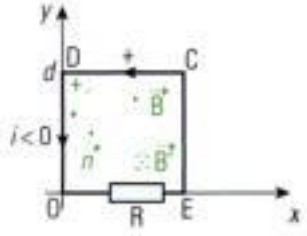
❸ En déduire le sens du courant induit i qui circule dans le circuit en associant le sens du champ magnétique $\vec{B}'$ créé au sens du courant via la « règle du tire-bouchon ».

→ Application

❶ Cette variation est due à l'augmentation du champ magnétique $\vec{B}$.
Le flux augmente donc : $\frac{d\phi}{dt} > 0$.

❷ Le champ magnétique $\vec{B}'$ créé par le courant s'opposera à l'augmentation du champ inducteur $\vec{B}$, il est donc opposé à $\vec{B}$: il est dirigé selon le sens négatif de l'axe Oz.

❸ L'application de la « règle du tire-bouchon » nous donne le sens du courant induit i qui crée le champ $\vec{B}'$: ce courant doit circuler dans le sens inverse au sens conventionnel positif du circuit. On vérifiera le résultat algébrique obtenu dans la méthode précédente.



Copyrighted material

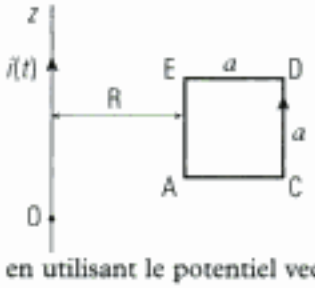
Hidden page

On donne la solution de l'équation de Poisson dans le cas d'un fil infini, $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{Fil} \frac{i(t)}{PM} d\vec{l}(P)$ où $d\vec{l}(P)$ est un déplacement élémentaire autour du point P situé sur le fil.

3) Calculer le potentiel vecteur $\vec{A}$ en M, que l'on prendra nul à la distance R de l'axe Oz.

4) En déduire le champ électromoteur $\vec{E}_m$ en M.

5) Une bobine plane, de N spires, a la forme d'un carré ACDE de coté a. Deux cotés sont parallèles à l'axe Oz, à la distance R et R + a de l'axe. Le fil est dans le plan de la bobine. On note e la force électromotrice d'induction apparaissant dans la bobine.



a) Calculer e en utilisant le potentiel vecteur.

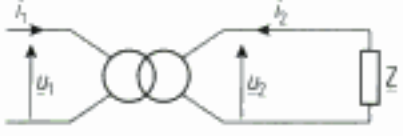
b) Calculer e en utilisant la loi de Faraday.

6) Quel est le coefficient d'inductance mutuelle M entre le fil et la bobine ?

Ex. 5

Un transformateur de tension, supposé parfait, a un rapport de transformation m = 0,22. On mesure au primaire une tension efficace de valeur

U_1 = 1000 V, de fréquence 50 Hz. Le secondaire alimente un moteur consommant une puissance moyenne de P = 5 kW, de facteur de puissance (cosφ) = 0,94. L'impédance équivalente $\underline{Z}$ du moteur est supposée inductive.



1) Le transformateur est parfait donc il n'engendre pas de pertes de puissance. La puissance instantanée à l'entrée est la même qu'en sortie. A partir de cette propriété, trouver la relation entre courant d'entrée et de sortie.

2) Le transformateur est connecté sur une charge d'impédance complexe $\underline{Z}$. Établir l'expression de l'impédance équivalente vue de l'entrée en fonction de $\underline{Z}$ et m.

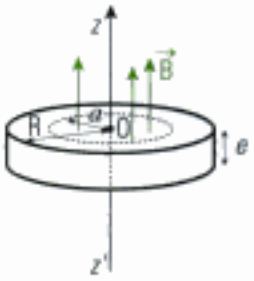
3) Déterminer littéralement, puis numériquement l'impédance complexe équivalente $\underline{Z}_e$ vue de l'entrée lorsque le moteur est connecté en sortie du transformateur.

4) La ligne qui alimente le primaire a une résistance R = 1 Ω. Calculer la puissance totale fournie par l'alimentation.

5) Comparer ce résultat à ce que l'on aurait sans utiliser de transformateur, le moteur étant relié à la même ligne alimentée sous 220 V.

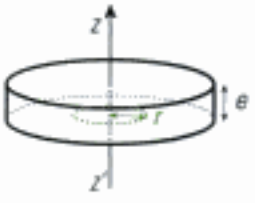
Ex. 6

Un disque conducteur, de conductivité γ, de rayon R, d'épaisseur e, est placé dans un champ magnétique uniforme, parallèle à l'axe Oz du disque, de valeur $B(t) = B_0 \cos\omega t$ dans la région $r < a < R$ et de valeur nulle ailleurs. Il s'établit en tout point M du disque des courants volumiques induits de densité $j(M, t)$ (courants de Foucault) dont on cherche l'expression.



1) Montrer que cette densité de courant est de direction orthoradiale. De quelles variables dépend cette densité *a priori* ?

2) On imagine un cercle de rayon r tracé dans le disque. Quelle est la relation entre le champ électromoteur e induit qui existe sur ce cercle et le flux de $\vec{B}$ à travers ? En déduire que j ne dépend que d'une seule variable d'espace.



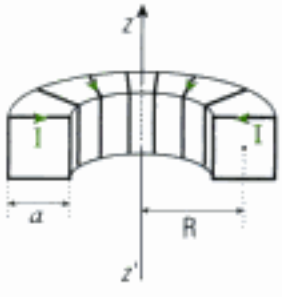
3) En déduire la densité de courant volumique induit $j(M, t)$ en tout point M du disque.

4) Exprimer la puissance volumique dissipée par effet Joule dans le disque.

5) Exprimer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le disque.

Ex. 7

Un solénoïde a la forme d'un tore de rayon R. Il est constitué de N spires carrées, jointives et de côté a.



1) Déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ créé par le solénoïde lorsque ses spires sont parcourues par un courant d'intensité I(t) (voir la vue en coupe).

2) Calculer le flux propre Φ de ce champ $\vec{B}$ à travers le solénoïde.

3) En déduire l'inductance propre L du solénoïde.

4) On place sur l'axe $z'z$ un fil infiniment long parcouru par un courant I' (le circuit se referme à grande distance du tore). I' est orienté dans le sens de l'axe zz'.

a) Déterminer le flux Φ' du champ magnétique $\vec{B}'$ créé par le fil à travers le solénoïde.

Copyrighted material

b) En déduire l'inductance mutuelle M entre les deux circuits.

5) On suppose que $\Gamma'(t) = I_0\cos(\omega t)$, et on mesure l'intensité $i(t)$ du courant induit dans le tore que l'on ferme sur un ampèremètre, la résistance totale du circuit torique valant R'.

a) Déterminer la valeur $i(t)$ de l'intensité du courant qui traverse le circuit torique en régime sinusoïdal établi.

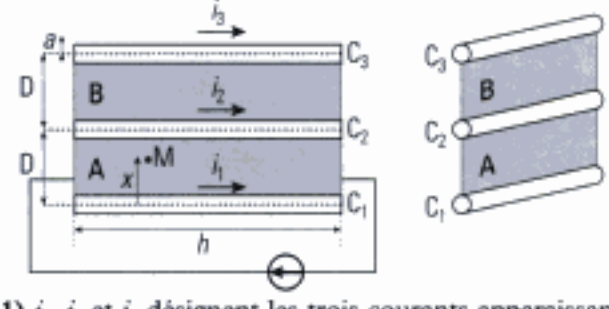
b) Application numérique : N = 1000 ; a = 2 cm ; R = 5 cm ; $\omega = 100\pi$ rad·s^{-1} ; R' = 1 Ω. Calculer $i(t)$.

c) Que se passe-t-il pour Lω très grand devant R' ? Commenter.

Niveau 3

Ex. 8 Effet pelliculaire

On considère trois conducteurs cylindriques C_1, C_2 et C_3, supposés très longs de même longueur h et de même rayon a. Leurs axes sont parallèles et sont situés dans un même plan à une distance D les uns des autres. Les trois conducteurs ont chacun une résistance r par unité de longueur, ils sont disposés en parallèle et reliés entre eux par deux plaques conductrices A et B de résistance et d'inductance négligeable, et ils sont alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation ω : $u(t) = U_0e^{j\omega t}$. Dans cet exercice, on suppose valables les équations des états quasi-stationnaires et on tient compte des phénomènes d'induction. En effet, il s'agit de modéliser de notre mieux ce qu'il se passe dans les fils électriques « classiques » constitués de tresses (assemblage de fils de cuivre en parallèle) et utilisés partout.



1) i_1, i_2 et i_3 désignent les trois courants apparaissant respectivement dans chacun des trois conducteurs. Montrer que l'on a nécessairement $i_1 = i_3$.

2) On s'intéresse à la plaque A se trouvant entre les conducteurs C_1 et C_2. Calculer en fonction de i_1 et i_2 le champ magnétique total $\vec{B}$ produit en un point M de A, à une distance x de l'axe du conducteur C_1.

3) Déterminer le flux magnétique ϕ à travers la surface de A. On supposera ensuite que $a \ll D \ll h$: simplifier l'expression de ϕ.

4) Quelle est la force électromotrice e d'induction apparaissant dans le circuit Γ formé par le bord de la plaque conductrice A ?

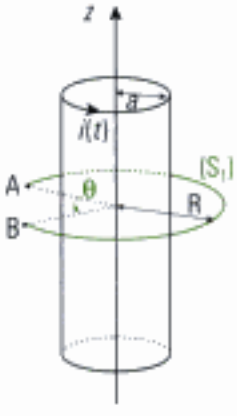
5) Quelle relation supplémentaire existe-t-il entre les deux courants i_1 et i_2 et la force électromotrice e ? En déduire que le rapport des deux valeurs complexes des intensités i_1 et i_2 et peut se mettre sous la forme $\frac{i_2}{i_1} = 1 - \frac{\ln 2}{f(\omega)}$, où la fonction complexe $f(\omega)$ est à déterminer.

6) Calculer le rapport des deux intensités en courant continu, puis ensuite pour une pulsation $\omega = +\infty$. Interpréter les résultats.

Ex. 9

On considère un solénoïde « infini » d'axe Oz, de rayon a et constitué de n spires par unité de longueur parcouru par un courant $i(t) = I_0\cos\omega t$.

On entoure ce solénoïde d'une portion de spire (S_1) entre les points A et B de rayon R > a et de résistance R_1.



On rappelle qu'un solénoïde parcouru par un courant variable $i(t)$ engendre un champ magnétique :

$$\vec{B}(r < a) = \mu_0 n i(t)\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}(r > a) = \vec{0}.$$

1) a) Déterminer le potentiel vecteur $\vec{A}$ en tout point.

b) En déduire le champ électromoteur $\vec{E}_m$ en un point M de (S_1) en fonction de n, a, R et $\frac{di(t)}{dt}$.

c) Calculer la différence de potentiel $V_A - V_B$.

2) On remplace (S_1) par une portion de spire complémentaire de la précédente (S_2) entre les points A et B. (S_2) est de rayon R > a et possède une résistance R_2.

Déterminer la différence de potentiel $V'_A - V'_B$.

3) On connecte les deux portions entre elles. Déterminer la valeur et le sens du courant $i_1(t)$ traversant cette spire.

4) On considère la spire (S) fermée constituée de la réunion des deux portions précédentes.

a) En utilisant la loi de Faraday, donner la valeur de la force électromotrice e_S dans la spire (S).

b) En déduire le courant $i_1(t)$ traversant la spire (S).

5) On ajoute en parallèle avec la portion (S_2) une portion de spire (S_3) de résistance R_3 de forme quelconque. Déterminer l'expression du courant i_3 dans cette portion de spire.

Ex. 10 Chauffage par induction

On rappelle qu'un solénoïde long, d'axe Oz, comprenant n spires circulaires de rayon a par unité de longueur, parcourues par un courant d'intensité

Copyrighted material

$I(t) = I_0\cos(\omega t)$ crée en un point M de son intérieur un champ magnétique $\vec{B} = \mu_0 n I(t)\vec{u}_z$, et un champ nul à l'extérieur.

On donne $n = 10000$, $a = 5$ cm, $I_0 = 10$ A.

1) On cherche un champ électrique $\vec{E}_m$ à l'intérieur du solénoïde.

a) Donner sa direction et les variables dont il dépend, dans un système de coordonnées bien choisi.

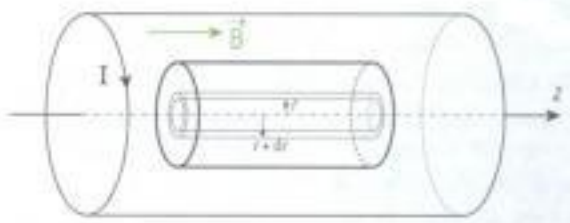
b) Calculer le flux magnétique ϕ à travers le contour constitué par une ligne de champ électrique $\vec{E}_m$.

c) Appliquer la loi de Faraday, et en déduire l'expression du champ électrique $\vec{E}_m$ induit.

2) Calculer la puissance moyenne $\langle P_J \rangle$ dissipée par effet Joule dans un cylindre métallique de conductivité σ, d'axe Oz, de hauteur L, et de section circulaire de rayon $b < a$.

A.N. : $\sigma = 6{\cdot}10^7\ \Omega^{-1}{\cdot}m^{-1}$, L = 0,5 m, $b = 1$ cm.

3) On suppose le cylindre métallique long précédent.



a) On découpe spirituellement un cylindre creux de longueur L et d'épaisseur dr dans le cylindre précédent. Ce cylindre creux est alors considéré comme un solénoïde. Déterminer le champ magnétique $d\vec{B}'$ créé sur l'axe Oz par ce solénoïde imaginaire, siège des courants dans le métal entre les cylindres de rayons r et $r + dr$.

b) En déduire le champ magnétique $\vec{B}'$ total créé par l'ensemble des courants induits.

c) A quelle condition sur b l'amplitude de $\vec{B}'$ est-elle négligeable devant l'amplitude de $\vec{B}$ (on fera apparaître $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\sigma\omega}}$) ? Commenter.

Indications

Ex. 1

1) Utiliser le théorème d'Ampère pour déterminer le champ magnétique créé par un fil infini. En utilisant le théorème de superposition, on trouve le champ magnétique créé par les deux fils.

Ex. 2

Avec la notation θ comme angle entre le champ magnétique et la normale au cadre, on calcule le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers le cadre en fonction de θ.

Il ne faut pas oublier que le flux à travers un cadre comportant N spires est égal à N fois le flux à travers une spire.

Ex. 3

2) On considère le solénoïde infiniment long (on néglige les effets de bord).

3) Le flux du champ magnétique est constitué du flux propre de la bobine et du flux du champ engendré par le solénoïde.

Ex. 4

3) On utilise la relation liant le champ magnétique et le potentiel vecteur : $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$.

Ex. 6

2) Supposer que $\vec{E} = \vec{E}_m$ et utiliser l'équation de Maxwell-Faraday.

Ex. 7

5) a) On utilise la notation complexe.

Ex. 8

1) On utilise des raisons de symétries.

Ex. 9

1) a) Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est continu et défini en tout point.

3) La différence de potentiel est la même aux bornes des deux portions de spire.

5) Calculer le flux du champ magnétique à l'intérieur de la surface délimitée par les portions de spire (S_2) et (S_3). En déduire la f.e.m dans la portion (S_3). Par application de la loi des mailles et des nœuds, déterminer le courant i_3.

Copyrighted material

Hidden page

D'où $\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} b \left(\ln \frac{r_1 + a}{r_1} - \ln \frac{r_2 + a}{r_2} \right)$.

On a donc : $$\boldsymbol{\Phi = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \ln\left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right).}$$

2) On met en œuvre la méthode n° 2.

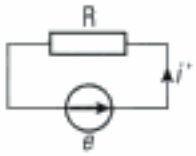
D'après la loi de Faraday, applicable dans le cas d'un contour fermé : $e = -\frac{d\Phi}{dt}$.

On en déduit :

$$\boldsymbol{e(t) = -\frac{\mu_0}{2\pi} b \ln\left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right) \frac{di(t)}{dt} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi} b \ln\left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right) \sin\omega t.}$$

Dans ce cas, e est orientée dans le sens du contour.

Pour déterminer le courant i' induit, on utilise la relation $0 = Ri' - e$ car le circuit est fermé.



Voir Définition 3 § B.2.

Il reste donc : $$\boldsymbol{i'(t) = \frac{e(t)}{R} = \frac{\mu_0 I_0 \omega}{2\pi R} b \ln\left(\frac{r_2(r_1 + a)}{r_1(r_2 + a)} \right) \sin\omega t.}$$

Exercice 2

1) On met en œuvre la méthode n° 2.

• On peut alors calculer le flux Φ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers le cadre. D'après le sens de la normale, le cadre est orienté de C vers A.

Le flux à travers chaque spire du cadre est identique. Donc le flux à travers le cadre est égal à N fois le flux à travers une spire.

On a $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$ où S représente la surface du cadre et $d\vec{S} = dS\,\vec{n} = dS(\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y})$.

Soit : $\boldsymbol{\Phi = NB_0 a^2 \sin\theta \cos\omega t}$.

• D'après la loi de Faraday, $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ lorsque la force électromotrice e est orientée de C vers A.

On en déduit : $$\boldsymbol{e(t) = NB_0 a^2 \omega \sin\theta \cos\omega t.}$$

2) On met en œuvre la méthode n° 1.

On calcule le potentiel vecteur $\vec{A}$ proposé, en un point $M(x, y, z)$ quelconque dans la base cartésienne.

$$\vec{A} = \frac{\vec{B} \wedge \overrightarrow{OM}}{2} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} zB \\ 0 \\ -xB \end{pmatrix}.$$

On vérifie qu'il est bien potentiel vecteur du champ magnétique $\vec{B}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \frac{zB}{2} \\ 0 \\ -\frac{xB}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{B}{2} + \frac{B}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{B}.$$

On retrouve bien $\boldsymbol{\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \vec{B}}$.

Copyrighted material

Hidden page

Exercice 3

1) Le solénoïde est parcouru par un courant Ni sur une longueur d.

Si on suppose la densité de courant surfacique $\vec{j_S}$ uniforme, on a $Ni = j_S d$.

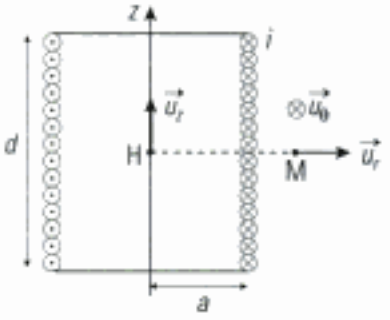


On peut se rappeler de la formule : $dI = \vec{j_S} da\, \vec{n}$ où dI est l'intensité traversant le segment da et $\vec{n}$ étant la normale à ce segment.

Pour l'étude d'un solénoïde, on utilise les coordonnées cylindriques et la base associée $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$. L'axe du solénoïde est dirigé suivant $\vec{u_z}$, le courant est alors orienté dans le sens de $\vec{u_\theta}$.

Donc : $$\vec{j_S} = \frac{Ni}{d}\vec{u_\theta}.$$

2) On peut utiliser les équations locales de l'électromagnétisme. On suppose que le solénoïde est infiniment long, c'est-à-dire que l'on néglige les effets de bord.



• On étudie les symétries et invariances du champ magnétique $\vec{B}$ en un point M quelconque de l'espace.

Soit H le projeté orthogonal de M sur l'axe du cylindre. Le plan π_1 (plan orthogonal à l'axe du cylindre) est plan de symétrie pour le solénoïde que l'on considère infiniment long, donc $\vec{B}$ est orthogonal à ce plan. $\vec{B}$ est dirigé selon le vecteur unitaire $\vec{u_z}$ de la base cylindrique.

La distribution est invariante dans toute rotation autour de son axe, ainsi que dans toute translation selon son axe puisque le solénoïde est supposé de longueur infinie. On en déduit $B = B(r, t)$.

On en conclut, dans un système de coordonnées cylindriques, que $\vec{B}(M, t) = B(r, t)\vec{u_z}$.

Cette expression est vérifiée que M soit à l'intérieur ou à l'extérieur du solénoïde.

• D'après l'énoncé, le champ magnétique est nul à l'infini. Donc, $\vec{B}(r \to +\infty) = \vec{0}$.

• Enfin, on utilise l'équation de Maxwell-Ampère que l'on écrit dans les domaines $r \leq a$ et $r \geq a$ où le milieu est assimilable au vide.

On connaît le champ magnétique à l'infini, on commence donc par l'équation de Maxwell à l'extérieur du solénoïde.

➢ **Pour $r \geq a$,** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ d'où $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = -\frac{\partial B}{\partial r}\vec{u_\theta} = \vec{0}$ puisqu'il n'y a pas de courant à l'extérieur du solénoïde.

Ceci donne :

$$B(r) = K \text{ où } K \text{ est une constante d'intégration.}$$

Or, le champ magnétique est nul à l'infini : $B(r \to +\infty) = 0$ donc $K = 0$.

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \geq a) = \vec{0}.$$

➢ **Pour $r \leq a$,** $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B} = \vec{0}$ de même, d'où :

$$B(r) = K' \text{ où } K' \text{ est une constante d'intégration.}$$

Le champ magnétique est tangent au solénoïde en $r = a$ et le solénoïde se comporte comme une distribution surfacique de courant donc le champ magnétique est discontinue en $r = a$.

On trouve alors $\vec{B}(r = a^+) - \vec{B}(r = a^-) = \mu_0 \vec{j_S} \wedge \vec{u_r}$ où $\vec{B}(r = a^+) = \vec{0}$ est le champ magnétique extérieur à la surface du solénoïde.

Donc $\vec{B}(r = a^-) = \mu_0 j_S \vec{u_z}$.

On a alors : $K' = \mu_0 j_S$.

Copyrighted material

On en déduit alors l'expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(r \leq a) = \mu_0 j_S \vec{u}_z = \mu_0 \frac{Ni}{d} \vec{u}_z.$$

Comme $\vec{j} = \vec{0}$ dans tout l'espace et que l'on se place implicitement dans l'hypothèse de l'ARQS, le système d'équations auxquelles le champ magnétique $\vec{B}$ obéit est le suivant :

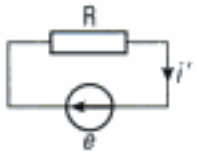
$$\begin{cases} \text{div}\vec{B} = 0 \\ \text{rot}\,\vec{B} = \vec{0} \end{cases}$$

On a alors $\vec{B}(r > a) = \vec{Cte}$ et $\vec{B}(r < a) = \vec{Cte}'$, car le plan $r = a$ offre une densité de courant surfacique.

$\vec{B}(r \to \infty) = \vec{0} \Rightarrow \vec{Cte} = \vec{0}$ et grâce à la formule de passage $\vec{B}(r = a^+) - \vec{B}(r = a^-) = \mu_0 \vec{j}_S \wedge \vec{u}_r$, on obtient : $\vec{Cte}' = \mu_0 j_S \vec{u}_z$.

3) On met en œuvre les méthodes n° 2 et 3.

La bobine plate constitue un circuit fermé, on utilise alors l'équation électrique du circuit : $0 = Ri'(t) - e(t)$ où $e(t)$ est la force électromotrice induite dans le circuit fermé.



$e(t)$ est obtenu par la loi de Faraday $e(t) = -\dfrac{d\Phi(t)}{dt}$, où Φ est le flux magnétique total traversant la bobine.

Le circuit est soumis au flux du champ magnétique créé par le solénoïde mais aussi à son flux propre. Le flux du champ magnétique est donc constitué de deux termes : le flux propre Φ_p et le flux mutuel Φ_m :

$$\Phi = \Phi_p + \Phi_m = Li'(t) + N\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S},$$

où S représente la surface de la bobine plate. Le flux mutuel est le flux créé par le solénoïde infini à travers les N spires de la bobine plate.

Donc $\Phi = Li'(t) + NB\pi b^2\cos\theta = Li'(t) + N\mu_0 \dfrac{Ni(t)}{d} \pi b^2\cos\theta$.

Le calcul de $\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ se fait simplement ici. Si on appelle $\vec{u}_x$ l'axe autour duquel la bobine plate pivote, on a : $d\vec{S} = dS\vec{n} = dS(\cos\theta\vec{u}_z + \sin\theta\vec{u}_y)$. Le résultat vient alors sans difficulté.

L'équation électrique donne donc $0 = Ri'(t) + L\dfrac{di'(t)}{dt} + \mu_0 \dfrac{N^2}{d} \pi b^2\cos\theta \dfrac{di(t)}{dt}$. **(1)**

Le courant $i(t)$ est sinusoïdal de la forme $i(t) = I_0\sin\omega t$ puisqu'il est nul à l'instant $t = 0$.

Le circuit est donc étudié en régime sinusoïdal forcé. On peut alors utiliser la notation complexe afin de déterminer $i'(t)$ en prenant $\underline{i} = -jI_0e^{j\omega t}$.

$\underline{i} = -jI_0e^{j\omega t} = I_0e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})}$ d'où : $i(t) = \text{Re}[\underline{i}(t)] = I_0\cos(\omega t - \dfrac{\pi}{2}) = I_0\sin\omega t$.

En notation complexe, l'équation **(1)** devient :

$$(R + jL\omega)\underline{i}' = -\mu_0 \frac{N^2}{d} \pi b^2\cos\theta\ \omega I_0 e^{j\omega t}.$$

Ceci donne : $\underline{i}' = -\dfrac{\mu_0 \frac{N^2}{d} \pi b^2\cos\theta\ \omega I_0}{R + jL\omega} e^{j\omega t} = -\dfrac{\mu_0 \frac{N^2}{d} \pi b^2\cos\theta\ \omega I_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} e^{j\left(\omega t - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)\right)}$.

On en déduit : $$I' = \frac{\mu_0 \frac{N^2}{d} \pi b^2\cos\theta\ \omega I_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}.$$

Copyright material

4) Dans cette question, il faut éviter de refaire tous les calculs mais simplement adapter les résultats précédents à la situation.

On calcule le flux. Le champ magnétique étant nul en dehors du solénoïde, son flux mutuel à travers la bobine est égal au flux à travers la section commune du solénoïde et de la bobine qui est le disque de rayon a.

Donc $\Phi = Li'(t) + NB\pi a^2 = Li'(t) + \mu_0 \dfrac{N^2 i}{d} \pi a^2$.

Ceci donne : $0 = Ri'(t) + L\dfrac{di'(t)}{dt} + \mu_0 \dfrac{N^2}{d} \pi a^2 \dfrac{di(t)}{dt}$.

On trouve donc : $$\mathbf{I' = \frac{\mu_0 \frac{N^2}{d} \pi a^2 \omega I_0}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}}}.$$

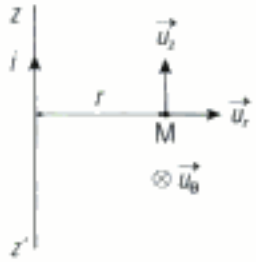
Ce courant reste identique quelque soit le rayon de la bobine plate $b > a$.

Exercices de niveau 2

Exercice 4

1) On détermine le champ magnétique $\vec{B}$ dans tout l'espace en utilisant le théorème d'Ampère.

On va se placer ici dans l'ARQS : on va supposer que l'on travaille dans les basses fréquences. Dans ce cas, l'équation de Maxwell-Ampère est : $\vec{rot}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ et le théorème d'Ampère s'écrit comme en première année : $\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I$, où I est l'intensité traversant le contour Γ.

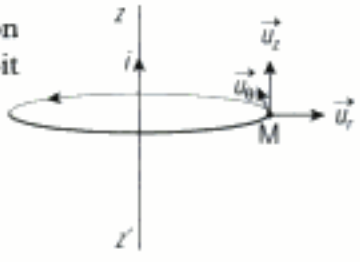


On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$. On oriente le fil suivant $\vec{u_z}$ de sorte que le courant soit aussi orienté dans le sens de $\vec{u_z}$.

Soit un point M de l'espace situé à une distance r du fil, on étudie les symétries et invariances afin de trouver la direction du champ magnétique et les variables dont il dépend.

Le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est un plan de symétrie. Le champ magnétique $\vec{B}$ est donc dirigé suivant $\vec{u_\theta}$. La distribution de courant est invariante par rotation d'angle θ et par translation suivant $\vec{u_z}$. Le champ magnétique ne dépend donc que de la variable r.

D'où : $$\vec{B}(M, t) = B(r, t)\vec{u_\theta}.$$



On applique le théorème d'Ampère sur un contour circulaire Γ de rayon r placée à une cote z constante. On oriente le contour de sorte que i soit dirigé dans le sens de la normale. Donc $d\vec{l} = r\,d\theta\,\vec{u_\theta}$.

Le théorème d'Ampère s'énonce :

$$\oint_\Gamma \vec{B}\cdot d\vec{l} = B(r, t) \times 2\pi r = \mu_0 i.$$

Ceci donne : $$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\vec{u_\theta}.$$

2) 1re méthode :

On met en œuvre la méthode n° 1.

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ est solution de l'équation de Poisson vue au chapitre 2 : $\Delta\vec{A} + \mu_0\vec{j} = \vec{0}$ où Δ est l'opérateur laplacien.

Copyrighted material

La solution est de la forme : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P\in\tau} \frac{\vec{j}(P)}{PM} d\tau$ pour un densité de courant volumique $\vec{j}$.

Pour un fil parcouru par un courant $i(t)$, on pourra écrire :

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{fil} \frac{i(t)}{PM} d\vec{l}(P),$$

où $d\vec{l}(P)$ est un déplacement élémentaire autour du point P situé sur le fil.



Le vecteur déplacement élémentaire $d\vec{l}(P)$ est dirigé suivant le vecteur $\vec{u}_z$ qui ne dépend pas du point P, donc le potentiel vecteur $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(\int_{fil} \frac{i(t)}{PM} dl(P) \right) \vec{u}_z$ est aussi dirigé suivant $\vec{u}_z$.

2e méthode :

Les plans z = Cte sont antisymétiques pour la distribution de courant. Par conséquent, comme le potentiel vecteur $\vec{A}$ est un « vrai vecteur » (par opposition au champ magnétique $\vec{B}$ qui est un « pseudo-vecteur », voir cours de 1re année), il est orthogonal à ces plans et il est ainsi dirigé suivant $\vec{u}_z$.

Le fil est infini donc invariant par translation suivant $\vec{u}_z$ et aussi invariant par rotation d'angle θ des coordonnées cylindriques.

On en déduit : $\vec{A}(M) = A(r)\vec{u}_z$.

3) Le calcul du potentiel vecteur $\vec{A}$ est évident en considérant $\vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$.

On a : $\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi r} \vec{u}_\theta = \overrightarrow{rot}\,\vec{A} = -\frac{\partial A(r)}{\partial r} \vec{u}_\theta$.

On en déduit : $A(r) = -\frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln(r) + K$ où K est une constante d'intégration.

Le potentiel vecteur étant nul à la distance R de l'axe Oz, on a donc : $K = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln(R)$.

On trouve alors : $\vec{A}(M) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{r}\right) \vec{u}_z$.

4) Par définition, $\vec{E}_m(M) = -\frac{\partial \vec{A}(M)}{\partial t} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \frac{di}{dt} \vec{u}_z$.

5) a) Orientons tout d'abord le contour dans le sens ACDE. Par définition, on a :

$$e = N \oint_{ACDE} \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = N\left(\int_A^C \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_D^E \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \right),$$

car le cadre est constitué de N spires.

Sur les côtés AC et DE, le déplacement élémentaire $d\vec{l}$ est dirigé selon $\vec{u}_r$ soit $\vec{E}_m \cdot d\vec{l} = 0$.

D'où :

$$e = N\left(\int_C^D \vec{E}_m \cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_m \cdot d\vec{l} \right) = N\left[\int_0^a \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt} dz + \int_a^0 \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{R}{R}\right) \frac{di}{dt} dz \right]$$

puisque $d\vec{l} = dz\vec{u}_z$ sur les cotés CD et EA.

D'où : $e = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} \ln\left(\frac{R+a}{R}\right) \frac{di}{dt}$.

⚠ Le sens de e est donné par le sens de l'intégration. On trouve un résultat de signe opposé si on intègre dans l'autre sens.

b) On met en œuvre la méthode n° 2.

On calcule le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers le cadre : $\Phi = N \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$,

où S représente la surface du cadre et $d\vec{S} = -dr dz \vec{u}_\theta$ si on conserve l'orientation ACDE du cadre.

Copyright material

On a donc : $\Phi = -N\int_0^a dz\int_R^{R+a}\frac{\mu_0 i}{2\pi r}dr = -\frac{\mu_0 N a i}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)$.

On en déduit : $$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 N a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right)\frac{di}{dt}.$$

On retrouve bien le même résultat par les deux méthodes.

6) Par définition, le coefficient d'inductance mutuelle est tel que $\Phi = Mi$, où Φ désigne le flux magnétique engendré par le fil infini à travers le cadre.

Donc $$M = \frac{\mu_0 N a}{2\pi}\ln\left(\frac{R+a}{R}\right).$$

⚠ On a toujours $M \geq 0$. On remarque que le flux Φ et l'intensité i dépendent d'une orientation.

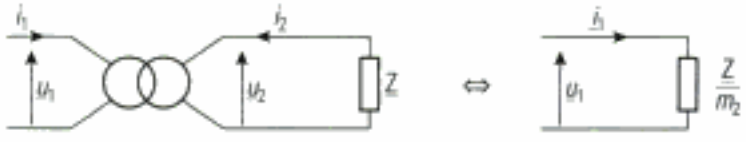
Exercice 5

1) On est dans le cas d'un transformateur parfait, donc $u_2 = m u_1$ et $i_1 = -m i_2$.

💡 Pour retrouver ces formules, on peut se rappeler que la puissance électrique instantanée reçue par le transformateur parfait à l'entrée $P_e = u_1 i_1$ est égale à la puissance instantanée fournie par le transformateur à la sortie $P_s = -u_2 i_2$.
On en déduit $u_1 i_1 = -u_2 i_2$ soit $i_1 = -\frac{u_2}{u_1} i_2$.

⚠ On avait démontré dans le cours la relation $i_1 = -m i_2$ uniquement lorsque $u_2 = 0$. Néanmoins, pour un transformateur parfait, ce résultat reste vérifié pour une tension au secondaire quelconque. On ne peut pas entrer dans les détails de cette explication qui est largement hors programme. Les élèves de la filière PSI peuvent trouver une ébauche d'explication dans la partie du programme de « conversion de puissance ».

2) L'impédance vue de l'entrée est par définition $\underline{Z}_e = \frac{\underline{u}_1}{\underline{i}_1}$ et on a $\underline{Z} = -\frac{\underline{u}_2}{\underline{i}_2}$.



Donc : $$\underline{Z}_e = \frac{\frac{\underline{u}_2}{m}}{-m\underline{i}_2} = \frac{1}{m^2}\left(-\frac{\underline{u}_2}{\underline{i}_2}\right) = \frac{\underline{Z}}{m^2}.$$

3) L'objectif est ici de déterminer l'impédance équivalente au moteur.
Pour cela, il faut déterminer le rapport des valeurs efficaces de la tension et du courant à ses bornes puisque ce sont les deux données que l'on pourra déterminer.
La tension à ses bornes est égale à $U_2 = mU_1 = 220$ V. Il s'agit ici de valeur efficace.
Le courant efficace I_2 est obtenu grâce à l'expression de la puissance active moyenne absorbée par le moteur : $P = U_2 I_2 \cos\varphi$.

Donc : $I_2 = \frac{P}{U_2\cos\varphi} = 24{,}2$ A.

L'impédance est inductive donc le courant est en retard sur la tension :
si on note $u_2(t) = U_2\sqrt{2}\cos\omega t$, alors $i_2(t) = I_2\sqrt{2}\cos(\omega t - \varphi)$.

On a donc : $\underline{Z} = -\frac{\underline{u}_2}{\underline{i}_2}e^{j\varphi} = \frac{U_2}{I_2}(\cos\varphi + j\sin\varphi)$.

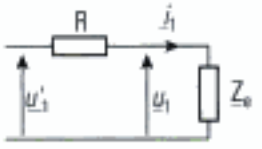
D'où : $$\underline{Z} = 8{,}55 + 3{,}10j.$$

Copyrighted material

⚠ On a choisi $\varphi > 0$, alors $\sin\varphi = \sqrt{1 - \cos^2\varphi}$.

On en déduit : $$\underline{Z}_e = \frac{\underline{Z}}{m^2} = 176{,}7 + 64{,}1j.$$

4) Le schéma électrique équivalent est :



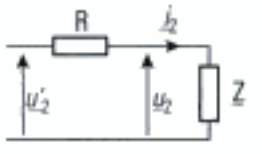
La valeur efficace du courant dans le transformateur est donc

$$I_1 = \frac{U_1}{|\underline{Z}_e|} = \frac{1000}{188} = 5{,}32 \text{ A}.$$

La puissance fournie par l'alimentation est la puissance fournie au transformateur $P_t = \text{Re}(\underline{Z}_e)I_1^2$ ainsi que la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance de la ligne $P_J = RI_1^2$.

Donc : $$\mathbf{P = 5{,}03\ kW}.$$

5) Le schéma électrique équivalent est :



La valeur efficace du courant dans le moteur est donc

$$I_2 = \frac{U_2}{|\underline{Z}|} = \frac{220}{9{,}09} = 24{,}2 \text{ A}.$$

La puissance fournie par l'alimentation est la puissance fournie au moteur $P_m = \text{Re}(\underline{Z})I_2^2$ ainsi que la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance de la ligne $P_J = RI_2^2$.

Donc : $$\mathbf{P = 5{,}59\ kW}.$$

⚠ On voit bien ici une des utilisations du transformateur qui sert d'adaptateur d'impédance afin de transmettre un maximum de puissance fournie par la source.
Une autre utilité du transformateur est l' « isolation galvanique » : la masse du circuit électrique du secondaire peut être différente de la masse du circuit au primaire.

Exercice 6

1) Le disque est placé dans un champ magnétique variable et donc soumis à un phénomène d'induction engendrant un courant qui, du fait de la loi de Lenz, aura tendance par ses conséquences à s'opposer à ses causes.

Les conséquences de ce courant sont notamment l'apparition d'un champ magnétique $\vec{B}'$ qui sera dirigé dans un sens opposé aux variations du champ $\vec{B}$. Donc $\vec{B}'$ est dirigé suivant $\vec{u}_z$. Ce champ est donc produit par des courants dirigés selon $\vec{u}_\theta$ en coordonnées cylindriques.

Le champ magnétique et le disque sont invariant par rotation d'angle θ des coordonnées cylindriques. Donc la densité de courant $\vec{j}$ est indépendant de θ.

On en déduit : $$\vec{j} = j(r, z, t)\vec{u}_\theta.$$

2) D'après l'équation de Maxwell-Faraday, on a $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_m = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Donc $$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}_m \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l},$$

où Γ est le cercle de rayon r et S la surface du disque de rayon r.

D'après la loi d'Ohm, on a $\vec{j} = \gamma\vec{E}_m$. D'où : $\dfrac{2\pi r}{\gamma} j(r, z, t) = -\dfrac{d\Phi}{dt}(r, t)$.

Cette relation est vérifiée quelque soit la cote z du cercle.

Donc : $$\vec{j} = j(r, t)\vec{u}_\theta.$$

3) On a $\oint_\Gamma \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \dfrac{j(r, t)}{\gamma} 2\pi r = -\dfrac{d}{dt}\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \omega B_0 \pi r^2 \sin\omega t$.

Soit : $$\vec{j}(M, t) = \frac{\gamma\omega B_0 r}{2} \sin\omega t\, \vec{u}_\theta.$$

Copyright material

Hidden page

Hidden page

c) Si $L\omega \gg R'$, $\boldsymbol{i(t) \approx \frac{MI_0}{L} \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{MI_0}{L} \cos\omega t}$.

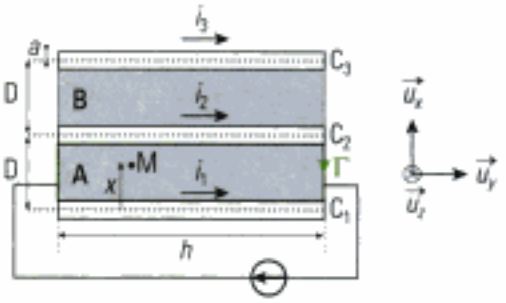
Le courant dans le solénoïde est en opposition de phase par rapport à celui dans le fil infini. On retrouve ici la loi de Lenz : le courant induit $i(t)$ créé un champ magnétique $\vec{B}$ dans le tore qui s'oppose au champ magnétique $\vec{B}'$ appliqué par le fil infini.

Exercices de niveau 3

Exercice 8

1) On place un repère cartésien sur la figure.

Le plan défini par l'axe du conducteur C_2 et les vecteurs $\vec{u}_y$ et $\vec{u}_z$ est un plan de symétrie du système.
Les courants dans les conducteurs C_1 et C_3 sont donc identiques : $\boldsymbol{i_1 = i_3}$.



2) Le champ magnétique créé par un conducteur est obtenu grâce au théorème d'Ampère.
On trouve $\vec{B}_1(M) = -\frac{\mu_0 i_1}{2\pi x}\vec{u}_z$ pour le champ magnétique créé par le conducteur C_1 en M (voir l'exercice 1 pour la démonstration).
De même, $\vec{B}_2(M) = \frac{\mu_0 i_2}{2\pi(D - x)}\vec{u}_z$ pour le champ magnétique créé par le conducteur C_2 en M et $\vec{B}_3(M) = \frac{\mu_0 i_1}{2\pi(2D - x)}\vec{u}_z$ pour le champ magnétique créé par le conducteur C_3 en M.

D'où : $$\boldsymbol{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0}{2\pi}\left(\frac{i_2}{(D - x)} + \frac{i_1}{(2D - x)} - \frac{i_1}{x}\right)\vec{u}_z.}$$

3) Le flux de ce champ magnétique à travers la surface S de A est égal à $\Phi = N\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$. On oriente la surface, par exemple, de sorte que la normale soit $\vec{u}_z$ (le courant i_1 est alors orienté dans le sens inverse du contour Γ et i_2 est orienté dans le sens du contour Γ).

Donc $\Phi = \frac{\mu_0}{2\pi}\int_a^{D-a}\left(\frac{i_2}{(D - x)} + \frac{i_1}{(2D - x)} - \frac{i_1}{x}\right)dx \int_0^h dy$.

Soit : $$\boldsymbol{\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\left[-i_2 \ln\left(\frac{a}{D - a}\right) - i_1 \ln\left(\frac{D + a}{2D - a}\right) - i_1 \ln\left(\frac{D - a}{a}\right)\right].}$$

Avec l'approximation $a \ll D \ll h$, on obtient $\boldsymbol{\Phi = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\left[(i_1 - i_2)\ln\left(\frac{a}{D}\right) + i_1 \ln 2\right]}$.

4) On met en œuvre la méthode n° 2.
La force électromotrice induite e dans le circuit fermé Γ défini dans l'énoncé est donnée par la loi de Faraday :

$$\boldsymbol{e = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 h}{2\pi}\left[\left(\frac{di_2}{dt} - \frac{di_1}{dt}\right)\ln\left(\frac{a}{D}\right) - \frac{di_1}{dt}\ln 2\right]} \quad (1).$$

5) On met en œuvre la méthode n° 3.
On considère le circuit fermé Γ comportant les deux conducteurs C_1 (parcouru par le courant i_1) et C_2 (parcouru par le courant i_2), l'équation électrique dans ce circuit donne : $0 = rhi_2 - rhi_1 - e$ où rh représente la résistance équivalente de chaque conducteur.



Copyrighted material

On en déduit la relation : $i_2 - i_1 = \dfrac{e}{rh}$ (2).

En notation complexe, les équations (1) et (2) donnent :

$$\underline{e} = j\omega \frac{\mu_0 h}{2\pi}\left[(\underline{i}_2 - \underline{i}_1)\ln\left(\frac{a}{D}\right) - \underline{i}_1 \ln 2\right] \quad \text{et} \quad \underline{i}_2 - \underline{i}_1 = \frac{\underline{e}}{rh}.$$

On trouve alors : $$\frac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = 1 - \frac{\ln 2}{\dfrac{2\pi r}{j\mu_0\omega} + \ln\left(\dfrac{D}{a}\right)}.$$

On a donc : $$f(\omega) = \frac{2\pi r}{j\mu_0\omega} + \ln\left(\frac{D}{a}\right).$$

6) En courant continu, $\omega = 0$, on trouve $\dfrac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = 1$.

En très haute fréquence, $\omega \to +\infty$, on obtient $\dfrac{\underline{i}_2}{\underline{i}_1} = 1 - \dfrac{\ln 2}{\ln\left(\dfrac{D}{a}\right)} < 1$.

Les courants sont toujours en phases. Cependant, le courant dans le conducteur du milieu devient inférieur aux courants dans les conducteurs extérieurs lorsque la fréquence augmente. Ce phénomène ressemble au phénomène d'effet de peau que l'on a rencontré dans le chapitre précédent. Il est dû à l'induction dans les conducteurs.

Exercice 9

1) a) On met en œuvre la méthode n° 1.

On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.

• Le solénoïde est infini donc invariant par translation suivant $\vec{u}_z$ et par rotation d'angle θ des coordonnées cylindriques. Le potentiel vecteur $\vec{A}$ ne dépend donc que de la variable r.

• En un point M quelconque de l'espace, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est antisymétrique pour la distribution de courant. Par conséquent, le potentiel vecteur $\vec{A}$ étant un « vrai vecteur », il est orthogonal à ce plan et il est donc dirigé suivant $\vec{u}_\theta$.

On en déduit : $$\vec{A}(M) = A(r)\vec{u}_\theta.$$

• Le calcul du potentiel vecteur $\vec{A}$ est évident en considérant $\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}$.

➢ À l'intérieur du solénoïde, on a : $\vec{B} = \mu_0 ni(t)\vec{u}_z = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial[rA(r)]}{\partial r}\vec{u}_z$.

On en déduit :

$$rA(r) = \mu_0 ni(t)\frac{r^2}{2} + K \text{ où K est une constante d'intégration.}$$

$\vec{A}(r = 0) = \vec{0}$ car $\vec{A}(r = 0)$ doit être orthogonal à tous les plans contenant l'axe (Oz). On a alors : $K = 0$.

On trouve alors : $$\vec{A}(r \le a) = \mu_0 ni(t)\frac{r}{2}\vec{u}_\theta.$$

➢ À l'extérieur du solénoïde, on a : $\vec{B} = \vec{0} = \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial[rA(r)]}{\partial r}\vec{u}_z$.

On en déduit :

$$rA(r) = K' \text{ où K' est une constante d'intégration.}$$

Il y a continuité du potentiel vecteur à la traversée du plan $r = a$, donc $A(a) = \mu_0 ni(t)\dfrac{a}{2}$ donne $aA(a) = \mu_0 ni(t)\dfrac{a^2}{2} = K'$.

Copyright material

Hidden page

Hidden page

Exercice 10

1) a) On utilise les coordonnées cylindriques et la base associée $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.

• Le solénoïde est considéré infini donc invariant par translation suivant $\vec{u_z}$ et par rotation d'angle θ des coordonnées cylindriques. Le champ électrique $\vec{E}_m$ ne dépend donc que de la variable r.

On appelle $\vec{E}_m$ le champ électrique parce que celui-ci résulte de l'induction.

• En un point M quelconque de l'espace, le plan $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est antisymétrique pour la distribution de courant. Par conséquent, le champ électrique $\vec{E}_m$ étant un « vrai vecteur », il est orthogonal à ce plan et il est donc dirigé suivant $\vec{u_\theta}$.

On en déduit : $$\vec{E}_m(M) = E_m(r)\vec{u}_\theta.$$

b) Une ligne de champ électrique est une courbe tangente en tout point au champ électrique. Il s'agit ici d'un cercle.

• **Si $r \leq a$**, alors $\Phi = \iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ où S est la surface du disque de rayon r.

Le champ magnétique est uniforme dans le solénoïde donc :

$$\Phi = \mu_0 n\pi r^2 I(t) = \mu_0 n\pi r^2 I_0 \cos\omega t.$$

• Si $r \geq a$, le champ magnétique est nul en dehors du solénoïde.

On obtient alors :

$$\Phi = \mu_0 n\pi a^2 I(t) = \mu_0 n\pi a^2 I_0 \cos\omega t.$$

c) D'après la loi de Faraday, $\oint_\Gamma \vec{E}_m\cdot d\vec{l} = -\dfrac{d\Phi}{dt}$ où Γ représente le cercle de rayon r.

Or, $\vec{E}_m(M) = E_m(r)\vec{u}_\theta$ et $d\vec{l} = r d\theta \vec{u}_\theta$ si on oriente le contour dans le sens trigonométrique.

On a donc :

$$E_m(r) 2\pi r = -\frac{d\Phi}{dt}.$$

On en déduit :

$$\vec{E}_m(r \leq a) = \mu_0 n \frac{r}{2} I_0 \omega \sin\omega t\, \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{E}_m(r > a) = \mu_0 n \frac{a^2}{2r} I_0 \omega \sin\omega t\, \vec{u}_\theta.$$

2) La puissance moyenne dissipée par effet Joule est :

$$\langle P_J \rangle = \iiint_{\text{cylindre}} \langle \vec{j}\cdot\vec{E}_m \rangle d\tau = \int_0^b \sigma \langle E_m(r \leq a)\rangle^2 r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz.$$

On obtient : $$\langle P_J \rangle = \sigma(\mu_0 n I_0 \omega)^2 \frac{\pi b^4 L}{16}.$$

On rappelle $\langle \sin^2 \rangle = \frac{1}{2}$.

A.N. : $$\langle P_J \rangle = 9{,}3\cdot 10^{-4}\, \omega^2.$$

3) a) Le champ magnétique créé sur l'axe Oz est de la forme $d\vec{B'} = \mu_0 dI' \vec{u_z}$ où dI' représente le courant qui traverse le cylindre creux (schématisé par une seule spire de longueur L).

Soit : $dI' = \iint_{S_C} \vec{j}\cdot d\vec{S} = j \times L dr = \sigma\mu_0 n L I_0 \omega \sin\omega t \dfrac{r}{2} dr$,

où S_C représente une section de la surface cylindrique d'épaisseur dr et $\vec{j} = \sigma\vec{E}_m$.

Copyrighted material

D'où :

$$\mathbf{d\vec{B}' = \mu_0 \frac{dI'}{L} \vec{u}_z = \sigma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin\omega t \frac{r}{2} dr \vec{u}_z.}$$

b) Pour trouver le champ magnétique total, il faut sommer les champ magnétiques $d\vec{B}'$ engendrés par chaque cylindre creux de rayon r variant de 0 à b :

$$\vec{B}' = \int_0^b d\vec{B}'.$$

Donc :

$$\mathbf{\vec{B}' = \sigma \mu_0^2 n I_0 \omega \sin\omega t \frac{b^2}{4} \vec{u}_z = \mu_0 n I_0 \sin\omega t \frac{b^2}{2\delta^2} \vec{u}_z.}$$

avec $\delta = \sqrt{\dfrac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$.

c) On a, en notation complexe :

$$\underline{\vec{B}} = \mu_0 n I_0 e^{j\omega t} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \underline{\vec{B}}' = \mu_0 n I_0 \frac{b^2}{2\delta^2} e^{j(\omega t - \frac{\pi}{2})} \vec{u}_z.$$

On détermine alors :

$$\frac{\|\vec{B}'\|}{\|\vec{B}\|} = \frac{b^2}{2\delta^2}.$$

On en déduit que l'amplitude de $\vec{B}'$ est négligeable devant l'amplitude de $\vec{B}$ si $b \ll \delta$.

Si le cylindre possède une épaisseur non négligeable devant δ, on peut supposer que le champ magnétique $\vec{B}'$ à l'intérieur du conducteur, à une certaine profondeur, compense le champ magnétique extérieur $\vec{B}$. Ceci explique l'absence de champ électromoteur $\vec{E}_m$ et donc de courant induit à partir d'une certaine profondeur dans le cylindre. Il s'agit là de l'effet de peau étudié au chapitre 2.

Copyright material

Copyrighted material

CHAPITRE

4 Induction électromagnétique dans un circuit mobile

Introduction

On étudie dans ce chapitre le cas où les circuits sont plongés dans un champ magnétique indépendant du temps. Les circuits peuvent être fixes et déformables, ou indéformables et mobiles.

L'induction est produite par le mouvement du circuit. On remarquera que la loi de Faraday peut encore être appliquée lorsque l'on a affaire à un circuit fermé, c'est-à-dire lorsque le calcul du flux magnétique à travers le circuit est possible.

Le traitement d'un problème d'induction passe donc par le choix de la méthode la plus judicieuse.

Le chapitre termine sur l'application du haut parleur électrodynamique dans lequel le phénomène d'induction permet la conversion de l'énergie électrique en énergie mécanique.

Plan du chapitre 4

A. Changement de référentiel 148

B. Champ électromoteur induit par un déplacement 148

C. Force électromotrice induite 149

D. Courants de Foucault 149

E. Application : le haut parleur électrodynamique

1. Description 150
2. Mise en équations 150
3. Solutions 151
4. Bilan énergétique 152

Méthodes

L'essentiel ; mise en œuvre 154

Énoncés des exercices 158

Indications 163

Solutions des exercices 165

Copyright material

A. Changement de référentiel

1. Cela signifie simplement : $v_e \ll c$.

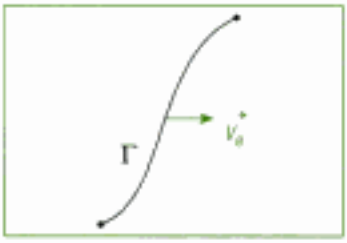


Fig. 1 - Élément de conducteur Γ.

Considérons un circuit source S (créateur de champ) indéformable et fixe dans un référentiel Galiléen R auquel est attaché le repère $Oxyz$ cartésien. Soit un élément de conducteur Γ centré en un point M et se déplaçant avec la vitesse $\vec{v}_e$, supposée non relativiste[1], dans R. Soit R' le référentiel attaché à cet élément de conducteur et O'$x'y'z'$ le repère correspondant (fig. 1).

On note $(\vec{E}, \vec{B})$ le champ électromagnétique créé au point M par les sources S, et évalué dans le référentiel R lié aux sources : ce champ est solution des équations de Maxwell locales telles qu'elles ont été écrites au chapitre 2.

Soit $(\vec{E}', \vec{B}')$ le champ électromagnétique créé au point M par les sources S, mais évalué dans le référentiel R' lié à l'élément de conducteur[2].

Pour exprimer le champ électromagnétique $(\vec{E}', \vec{B}')$ en fonction du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$, on admet que les lois physiques restent les mêmes dans tous les référentiels.

2. Le conducteur est fixe dans **son** référentiel.

En l'occurrence, on écrit l'invariance de la force de Lorentz subie par un électron possédant la vitesse $\vec{v}$ dans R et $\vec{v}'$ dans R' :

$$-e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = -e(\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}').$$

D'autre part, on écrit la composition des vitesses (non relativistes) :

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{v}_e \text{ [3]}.$$

3. $\vec{v}$ est la vitesse absolue, $\vec{v}'$ la vitesse relative et $\vec{v}_e$ la vitesse d'entraînement.

On substitue cette expression dans l'équation précédente :

$$\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} + \vec{v}' \wedge \vec{B} = \vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}'.$$

Cette équation étant toujours vérifiée, on l'écrit dans le cas particulier où $\vec{v}' = \vec{0}$, on obtient alors :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

Compte tenu de ce résultat, il vient, en reprenant l'équation générale :
$\vec{v}' \wedge \vec{B} = \vec{v}' \wedge \vec{B}'$, soit $\vec{v}' \wedge (\vec{B} - \vec{B}') = \vec{0}$.

Cette dernière équation est valable pour tout vecteur vitesse $\vec{v}'$, par exemple colinéaire aux vecteurs de base de l'un des repères : le vecteur $\vec{B} - \vec{B}'$ doit donc être colinéaire à chacun des vecteurs de base du repère, condition qui ne peut être vérifiée que s'il est nul.

4. On parle de transformation galiléenne des champs.

Propriété 1

Les **formules de changement de référentiel** pour le champ électromagnétique (valables pour des transformations non relativistes) sont[4] :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B}.$$

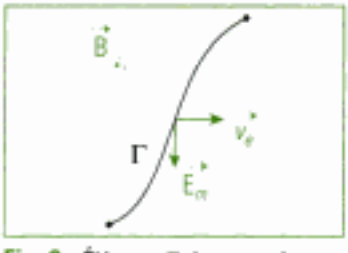


Fig. 2 - Élément Γ dans un champ magnétique $\vec{B}$ stationnaire.

B. Champ électromoteur induit par un déplacement

5. conformément au libellé du programme officiel.

6. Comme le champ magnétique $\vec{B}$ est inchangé dans un changement de référentiel, il reste indépendant du temps et uniforme dans chaque référentiel.

7. $\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{0}$ car $\vec{A}$ est aussi permanent.

Nous supposerons[5] que le champ magnétique est uniforme et indépendant du temps[6]. Dans le référentiel R' du conducteur, le champ électrique s'écrit : $\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$ (fig. 2), et dans R :

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \overrightarrow{\text{grad}}V = -\overrightarrow{\text{grad}}V \text{ [7]}.$$

On peut donc écrire : $\vec{E}' = -\overrightarrow{\text{grad}}V + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$.

Copyrighted material

1. On parle de champ électromoteur « de Lorentz » pour préciser qu'il s'agit d'un circuit mobile dans un champ stationnaire.

2. L'expression la plus général du champ électrique $\vec{E}$ dans un repère mobile avec un champ magnétique $\vec{B}(t)$ dépendant du temps est :
$\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}$.

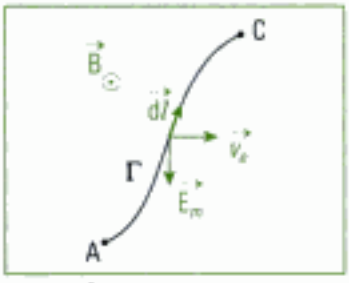


Fig. 3 - Élément Γ dans un champ magnétique $\vec{B}$ stationnaire.

3. Il s'agit d'une portion de conducteur filiforme, indéformable et fixe dans son propre référentiel, mais mobile dans le référentiel des sources.

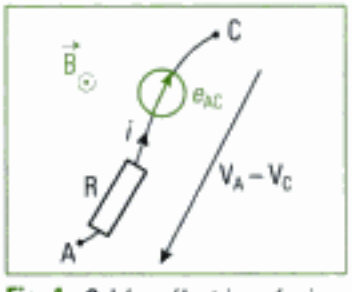


Fig. 4 - Schéma électrique équivalent.

4. Léon Jean Bernard Foucault (1819-1868) était un physicien français. Il mit en évidence les courants de même nom, mais a aussi inventé le gyroscope en 1852 et mis en évidence les forces de Coriolis avec le pendule qui porte son nom. Il a aussi mesuré la vitesse de la lumière.

5. La densité de courant volumique $\vec{j}$ ne s'écrit de cette manière que lorsque le conducteur est fixe dans R'.

6. Ce résultat est conforme à la loi de Lenz : les forces qui s'appliquent s'opposent à la cause de l'induction, qui est ici le mouvement du conducteur.

On peut donc considérer que le potentiel scalaire V du champ $\vec{E}$ est aussi un potentiel scalaire du champ $\vec{E}'$, et que le champ $\vec{E}'$ contient un terme qui n'est pas *a priori* à circulation conservative. Ce terme sera appelé champ électromoteur, de sorte que l'on peut écrire :

Définition 1

Le **champ électromoteur d'induction** $\vec{E}_m$ dans un circuit mobile de vitesse $\vec{v}_e$ dans un référentiel galiléen R s'écrit :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B},$$

et le champ électrique $\vec{E}'$ dans le référentiel R' du conducteur Γ s'écrit :

$$\vec{E}' = -\overrightarrow{\text{grad}}V + \vec{E}_m.$$

C. Force électromotrice induite

Soient A et C les extrémités de la portion de conducteur[3] considérée (fig. 3). Calculons la circulation du champ électrique $\vec{E}'$ entre ces deux points :

$$\int_A^C \vec{E}'\cdot d\vec{l} = \int_A^C -\overrightarrow{\text{grad}}V\cdot d\vec{l} + \int_A^C \vec{E}_m\cdot d\vec{l} = V_A - V_C + e_{AC}.$$

On a vu au chapitre précédent la relation :

$$\int_A^C \vec{E}'\cdot d\vec{l} = Ri,$$

où i est l'intensité qui circule dans le conducteur de A vers C.

Propriété 2

La tension aux bornes de la portion de conducteur, en convention récepteur, vaut alors :

$$V_A - V_C = Ri - e_{AC}, \text{ avec } e_{AC} = \int_A^C \vec{E}_m\cdot d\vec{l}.$$

e_{AC} est la **force électromotrice d'induction** dans le circuit entre A et C (fig. 4).

D. Courants de Foucault[4]

Soit un conducteur massif mobile et plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$.

Dans le référentiel du conducteur, le champ électrique $\vec{E}'$ s'écrit :

$$\vec{E}' = -\overrightarrow{\text{grad}}V + \vec{E}_m, \text{ avec } \vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

Dans un bon conducteur, la loi d'Ohm s'applique[5] :

$$\vec{j}' = \sigma\vec{E}'.$$

Si le conducteur est mobile dans le champ magnétique $\vec{B}$ sans qu'un générateur n'y impose de courant, on a alors :

$$-\overrightarrow{\text{grad}}V = \vec{0} \text{ et } \vec{j}' = \sigma\vec{v}_e \wedge \vec{B}.$$

De telles densités de courant volumique sont à l'origine des forces de Laplace qui freinent le mouvement du conducteur[6] : c'est le principe du freinage électromagnétique. De tels dispositifs sont très utiles car ils ne s'usent

Copyright-free material

pas du fait de l'absence de contact. En revanche, ce type de freinage n'est efficace qu'à des vitesses élevées, c'est pourquoi il n'est utilisé que comme un freinage d'appoint. On rencontre de tels dispositifs dans les poids lourds ou les trains.

E. Application : le haut-parleur électrodynamique

Le haut parleur est un dispositif permettant la conversion d'énergie électrique en énergie sonore[1].

1. Le cours de physique des ondes sonores montre que l'énergie sonore est une énergie mécanique.

E.1. Description

Un haut-parleur électrodynamique est l'assemblage d'une bobine comportant N spires de centre C et de rayon a solidaire d'une membrane, et d'un aimant (fig. 5). L'aimant est torique à bases circulaires et est immobile dans le référentiel d'étude, tandis que l'ensemble {bobine + membrane} constitue un assemblage mobile de masse m, astreint à ne pouvoir se déplacer que le long de l'axe Oz de révolution de l'aimant. La bobine est liée à l'aimant grâce à des ressorts exerçant une force de rappel équivalent à celle d'un ressort de raideur k. La position d'équilibre du point C est prise comme origine de l'axe Oz.

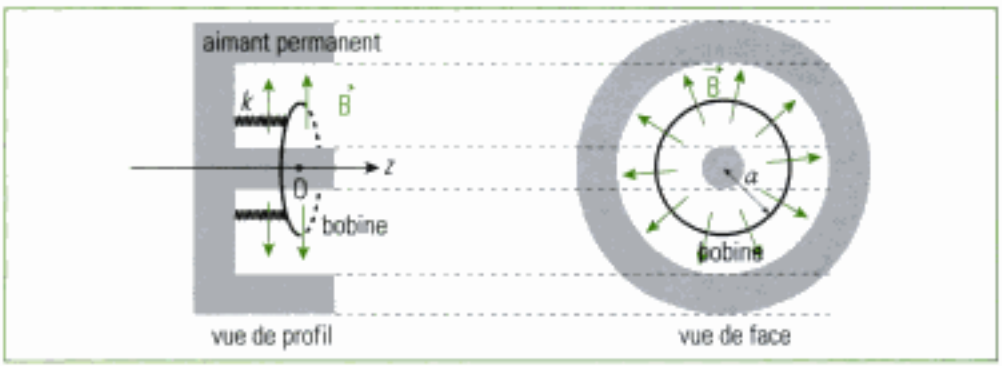


Fig. 5 - Schéma du haut parleur.

Un générateur idéal de tension sinusoïdale de fréquence f est branché aux bornes de la bobine, supposée de résistance R et d'inductance propre L. En régime forcé, la bobine est parcourue par un courant sinusoïdal i de fréquence f et se trouve plongée dans le champ magnétique de l'aimant, supposé radial et de norme constante. Elle subit donc une force de Laplace qui va la mettre en mouvement en générant un mouvement forcé de fréquence f. Du fait de ce mouvement, les frottements de la membrane avec l'air produisent des ondes sonores.

D'autre part, on note que la bobine est mobile dans un champ magnétique : elle est donc *a priori* siège d'une force électromotrice d'induction qui influe sur l'intensité qui la traverse. Le dispositif couple donc le déplacement $z(t)$ de la bobine et l'intensité $i(t)$ du courant qui la traverse : **on parle donc de dispositif électromécanique, ou électrodynamique**[2].

2. Notons que le même dispositif, non alimenté par un générateur, mais excité par des ondes sonores, peut être utilisé comme microphone : la conversion électromécanique se fait dans le sens inverse. En effet, l'onde sonore met la membrane en mouvement, et donc la bobine solidaire. Cette dernière se trouve donc siège d'une force électromotrice d'induction qui crée un courant induit. Il y a aussi des forces de Laplace dues à la présence des courants induits dans le champ magnétique et qui s'opposent au mouvement de la bobine conformément à la loi de Lenz. Il y a conversion et couplage électromécaniques.

E.2. Mise en équations

La mise en équations met en œuvre deux procédures. D'une part l'obtention de l'équation du mouvement de l'attelage mobile est une démarche mécanique, et d'autre part le bilan électrique dans le circuit est effectué en utilisant la loi des mailles.

Copyrighted material

Équation mécanique

L'attelage mobile de masse m ne peut avoir qu'un mouvement de translation. On applique donc le principe fondamental de la mécanique.

Les forces appliquées sur la bobine sont les suivantes :

– le poids $\vec{P}$, compensé par la réaction $\vec{R}$ des supports de l'attelage sur l'aimant.

– la force de rappel élastique $\vec{T}$ des ressorts : $\vec{T} = -kz\vec{u}_z$.

– la force de frottement que l'air exerce sur la bobine. C'est une force de freinage de type visqueux $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{z}\vec{u}_z$, dont la puissance correspond à celle de l'onde sonore émise[1].

– la force de Laplace $\vec{F}$ que subit la bobine plongée dans le champ magnétique de l'aimant (fig. 6).

1. L'onde sonore est une perturbation mécanique qui provient de la mise en mouvement de l'air engendrée par la membrane du haut parleur.

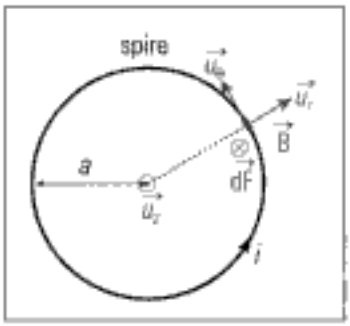


Fig. 6 - Force élémentaire de Laplace appliquée sur la bobine.

Un élément de longueur $\vec{dl} = ad\theta\vec{u}_\theta$ d'une des spires de la bobine subit la force de Laplace élémentaire :

$$\vec{dF} = id\vec{l} \wedge \vec{B} = i(ad\theta\vec{u}_\theta) \wedge (B\vec{u}_r) = -iaBd\theta\vec{u}_z.$$

On obtient la résultante : $\vec{F} = N\int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \vec{dF} = \mathbf{-2N\pi iaB\vec{u}_z}$.

En écrivant l'accélération de l'attelage en fonction de sa position z,

$$\vec{a} = \frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z = \ddot{z}\vec{u}_z,$$

le principe fondamental donne, en projection sur l'axe Oz :

$$\boldsymbol{m\ddot{z} + h\dot{z} + kz = -2N\pi aBi}.$$

Équation électrique

Le générateur inducteur impose la force électromotrice $E(t)$ dans le bobinage de résistance R et d'auto-inductance L[2].

Il reste à prendre en compte la force électromotrice d'induction e provenant du mouvement de l'attelage dans le champ magnétique. Elle se calcule à l'aide du champ électromoteur :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = \dot{z}\vec{u}_z \wedge B\vec{u}_r = B\dot{z}\vec{u}_\theta[3].$$

La circulation de ce champ électromoteur le long du bobinage permet d'obtenir l'expression de e. En prenant $\vec{dl} = ad\theta\vec{u}_\theta$, on oriente ce générateur dans le sens trigonométrique. Il vient alors :

$$e(t) = \oint_{N\text{ spires}} \vec{E}_m \cdot \vec{dl} = \oint_{N\text{ spires}} B\dot{z}\vec{u}_\theta \cdot ad\theta\vec{u}_\theta = 2N\pi Ba\dot{z}.$$

La loi des mailles dans le circuit donne alors :

$E(t) + e(t) = Ri + L\dfrac{di}{dt}$, soit :

$$\mathbf{Ri + L\frac{di}{dt} = E(t) + 2N\pi Ba\dot{z}}.$$

Le fonctionnement du haut parleur est donc régi par ce système de deux équations différentielles couplées des fonctions inconnues $i(t)$ et $z(t)$.

2. La tension aux bornes de l'inductance L est la force électromotrice d'auto-induction.

3. Le champ magnétique est stationnaire ; il n'y a donc pas de champ électromoteur d'induction « de Neumann » $\vec{E}_m = -\dfrac{\partial\vec{A}}{\partial t}$.

E.3. Solutions

Le générateur délivrant une tension $E(t)$ sinusoïdale, on cherche la solution en régime sinusoïdal établi[4].

4. On parle aussi de régime forcé.

On pose $E(t) = E_0\cos\omega t$. On utilise la notation complexe pour s'affranchir des dérivées temporelles.

Copyrighted material

Hidden page

Pour obtenir un bilan énergétique entre deux instants consécutifs t et $t + dt$, on multiplie cette dernière équation par dt et il vient :

$$Ri^2dt + d\left(\frac{1}{2}Li^2\right) = E(t)i\,dt + dW_e,$$

où $dW_e = 2N\pi Ba\dot{z}i\,dt$ est le travail apporté par la force électromotrice d'induction.

On reconnaît les quantités suivantes : $d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)$ est l'accroissement d'énergie emmagasinée par la bobine, Ri^2dt est l'énergie dépensée par effet Joule et $Ei\,dt$ est l'énergie apportée par le générateur.

On peut aussi écrire :

$$\underbrace{Ei\,dt}_{\text{énergie fournie par le générateur}} + \underbrace{dW_e}_{\text{énergie fournie par le générateur de force électromotrice d'induction}} = \underbrace{Ri^2dt}_{\text{énergie perdue par effet Joule}} + \underbrace{d\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}_{\text{énergie emmagasinée dans la bobine}}$$

Couplage électromécanique parfait

On s'aperçoit que $dW_e = 2N\pi aBvi\,dt = -dW_L$, soit :

$$dW_e + dW_L = 0.$$

Cette équation traduit le fait que le transfert entre l'énergie électrique de la force électromotrice induite et le travail mécanique de la force de Laplace est parfait. Le couplage électromécanique est alors parfait.

Bilan énergétique global

En éliminant cette énergie $dW_e = -dW_L$ entre les deux équations énergétiques, on obtient le bilan :

$$\underbrace{Ei\,dt}_{\text{énergie fournie par le générateur}} = \underbrace{Ri^2dt + hv^2dt}_{\text{énergie dissipée}} + \underbrace{d\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kz^2\right)}_{\text{énergie emmagasinée par la bobine}}$$

L'énergie fournie par le générateur sert donc d'une part à augmenter les différentes formes d'énergie du système, et d'autre part à nourrir les phénomènes dissipatifs.

Rendement

En régime sinusoïdal permanent, intégrons l'équation précédente sur une période, et divisons par cette période ; on obtient alors le bilan des puissances moyennes[1] :

$$\langle Ei\rangle = \langle Ri^2\rangle + \langle hv^2\rangle + \left\langle \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kz^2\right)\right\rangle.$$

Mais comme les diverses formes d'énergie sont des fonctions périodiques du temps, le dernier terme de l'égalité est nul[2]. On a donc :

$$\langle Ei\rangle = \langle Ri^2\rangle + \langle hv^2\rangle.$$

En valeur moyenne, la puissance fournie par le générateur sert donc à nourrir les phénomènes dissipatifs. Dans le modèle adopté, la puissance de la force de type fluide est en fait la puissance sonore rayonnée : c'est donc la puissance « utile ».

En revanche, la puissance de dissipation par effet Joule constitue bel et bien une perte.

On peut donc définir le rendement du haut parleur suivant :

$$\eta = \frac{\langle hv^2\rangle}{\langle Ri^2\rangle + \langle hv^2\rangle}.$$

Ce dernier est d'autant plus élevé que h est grand ou R petit[3].

1. On rappelle la notation :
$$\langle u(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)dt,$$
si T est une période de u.

2. Soit $U = \frac{1}{2}Li^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kz^2$.
Alors on a :
$\left\langle \frac{dU}{dt}\right\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T dU = \frac{1}{T}[U(T) - U(0)] = 0.$
De manière générale, les dérivées temporelles de différentielles totales périodiques ont une valeur moyenne nulle dans le temps.

3. Les haut-parleurs de 4 Ω sont ainsi meilleurs que ceux de 8 Ω.

Copyrighted material

L'essentiel

✓ Transformation des champs, dite galiléenne

• Soient $(\vec{E}\ ;\ \vec{B})$ et $(\vec{E'}\ ;\ \vec{B'})$ les champs électromagnétiques dans les référentiels respectifs R et R', où R' se déplace à la vitesse $\vec{v_e}$ par rapport à R.

Le changement de référentiel galiléen non relativiste s'écrit alors :

$$\vec{E'} = \vec{E} + \vec{v_e} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B'} = \vec{B}.$$

• Le **champ électromoteur** $\vec{E}_m$ est défini dans R' par la relation:

$$\vec{E}_m = \vec{v_e} \wedge \vec{B}.$$

• La **force électromotrice** e_{AC} induite entre deux points A et C s'écrit :

$$e_{AC} = \int_A^C \vec{E}_m \cdot \mathrm{d}\vec{l}.$$

✓ Courants de Foucault

Ce sont des courants volumiques induits qui prennent naissance dans des conducteurs massifs mobiles dans un champ magnétique uniforme, ou dans des conducteurs fixes plongés dans un champ magnétique variable.

✓ Haut-parleur électrodynamique (H.P.)

Il s'agit d'un dispositif qui assure un couplage électromécanique. Les phénomènes d'induction permettent le transfert entre l'énergie électrique de la force électromotrice induite et le travail mécanique des forces de Laplace.

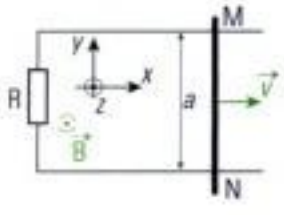
L'énergie sonore, qui est du type mécanique, provient des forces de frottements entre la membrane et l'air. L'énergie électrique est celle fournie par le générateur électrique. L'énergie électrique est ainsi convertie en énergie mécanique.

Mise en œuvre

Méthode n° 1

Comment calculer l'intensité du courant induit dans un circuit mobile ou déformable en utilisant le champ électromoteur ?

On cherche l'expression de l'intensité i du courant induit dans un circuit déformable constitué par des rails conducteurs parallèles distants d'une largeur a, reliés d'un coté par une résistance R et de l'autre coté par un barreau mobile MN se déplaçant à la vitesse v constante dans la direction des rails. Ce circuit rectangulaire est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonal à son plan.



Copyrighted material

→ Savoir faire

❶ Identifier la partie du circuit qui est mobile et déterminer le champ électromoteur en chacun des points mobiles du circuit.

❷ Calculer la circulation du champ électromoteur le long de la partie mobile du circuit et faire apparaître le schéma électrique du générateur de tension associé, en prenant garde à orienter sa flèche dans le sens choisi pour calculer la circulation.

❸ Choisir un sens conventionnel pour l'intensité du courant (on prend généralement le même sens que l'on avait choisi pour calculer la circulation, mais ce n'est pas une obligation) et appliquer la loi des mailles pour calculer l'intensité i recherchée.

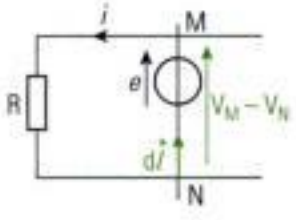
→ Application

❶ On calcule le champ électromoteur d'induction dans le barreau mobile MN :

$$\vec{E}_m = \vec{v}_e \wedge \vec{B} = v\vec{u}_x \wedge B\vec{u}_z = -vB\vec{u}_y.$$

❷ On calcule ensuite la force électromotrice e d'induction, en calculant la circulation du champ électromoteur. Le générateur de force électromotrice e est orienté dans le sens de la circulation :

$$e = \int_N^M \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_{y=0}^{y=a} -vB\vec{u}_y \cdot dy\vec{u}_y = -vaB.$$



❸ Ce générateur impose un courant induit d'intensité i, que l'on oriente ici dans le sens du générateur qui l'impose[1].
Il reste à appliquer la loi des mailles. Elle donne ici :

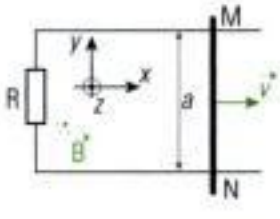
$$V_M - V_N = Ri = e = -vaB, \text{ soit } \boldsymbol{i = \frac{-vaB}{R}}.$$

L'intensité trouvée est négative, ce qui signifie que le courant induit a le sens contraire au sens conventionnel choisi[2].

Méthode n° 2

Comment calculer l'intensité du courant induit dans un circuit mobile ou déformable en utilisant le flux magnétique ?

On cherche l'expression de l'intensité i du courant induit dans un circuit déformable constitué par des rails conducteurs parallèles distants d'une largeur a, reliés d'un coté par une résistance R et de l'autre coté par un barreau mobile MN se déplaçant à la vitesse v constante dans la direction des rails. Ce circuit rectangulaire est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonal à son plan.



→ Savoir faire

❶ Calculer le flux ϕ du champ magnétique à travers le circuit. Si ϕ reste nul lorsque le circuit bouge, alors appliquer la méthode n° 1 : c'est la seule applicable. Si ϕ est non nul et varie lors du mouvement du circuit, alors passer à ❷.

1. Le choix de cette orientation n'est pas obligatoire. Si on choisi de flécher le courant dans l'autre sens, alors on le trouvera de signe contraire.

2. On pouvait s'en douter, vu que la force électromotrice était négative.

Copyrighted

❷ Utiliser la loi de Faraday pour calculer la force électromotrice d'induction. Placer le générateur associé dans le circuit, en prenant garde à orienter sa flèche dans le sens positif associé au choix de la normale au circuit qui a servi à calculer ϕ.

❸ Choisir un sens conventionnel pour l'intensité du courant (on prend généralement le même sens que l'on avait choisi pour calculer la circulation, mais ce n'est pas une obligation) et appliquer la loi des mailles pour calculer l'intensité i recherchée.

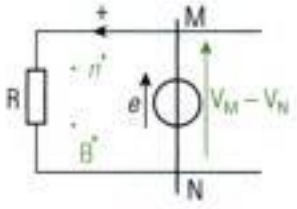
→ Application

❶ Le circuit est fermé : on pourra donc appliquer la loi de Faraday. On choisit une normale $\vec{n}$ au circuit, et de ce fait on oriente le circuit positivement via la règle du tire bouchon. On prend par exemple $\vec{n} = +\vec{u}_z$, qui a le même sens que le champ $\vec{B}$.
On calcule le flux magnétique ϕ à travers ce circuit :

$$\phi = \iint_S B\vec{u}_z \cdot \vec{n}\, dS = Bax.$$

❷ On en déduit la force électromotrice d'induction e grâce à la loi de Faraday, le sens de la flèche du générateur étant le sens positif choisi :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -Ba\frac{dx}{dt} = -Bav.$$



On retrouve le résultat de la méthode précédente.

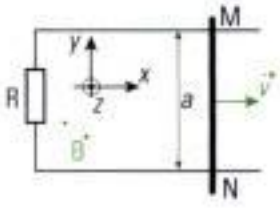
❸ Pour calculer l'intensité du courant induit, il reste à lui donner un sens positif, par exemple le sens positif déjà choisi[1], puis on applique la loi des mailles[2].

$$V_M - V_N = Ri = e = -vaB, \text{ soit } \boldsymbol{i = \frac{-vaB}{R}}.$$

Méthode n° 3

Comment vérifier le sens du courant induit dans un circuit mobile sans effectuer de calcul ?

On cherche le sens de l'intensité i du courant induit dans un circuit déformable constitué par des rails conducteurs parallèles distants d'une largeur a, reliés d'un coté par une résistance R et de l'autre coté par un barreau mobile MN se déplaçant à la vitesse v constante dans la direction des rails. Ce circuit rectangulaire est plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ orthogonal à son plan.



→ Savoir faire

❶ On identifie un paramètre dont la variation temporelle donne naissance au phénomène d'induction.

❷ On donne un sens conventionnel au courant induit, choisi au hasard. On cherche les caractéristiques qualitatives du champ magnétique créé par ce courant : direction et sens.

❸ On utilise la loi de Lenz : le champ magnétique créé par ce courant doit s'opposer à la variation temporelle choisie en ❶. On en déduit le sens du courant induit.

1. On n'est pas obligé de garder le sens positif choisi auparavant, lequel n'était lié qu'au sens de la flèche du générateur de force électromotrice e.

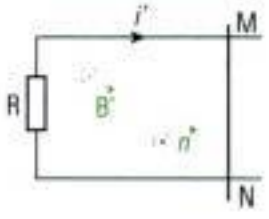
2. On remarque que l'on retrouve, à ce stade de la démarche, une situation identique à celle de la méthode précédente.

Copyrighted material

❹ La partie mobile du circuit, traversée par le courant induit, subit une force de Laplace qui doit s'opposer au mouvement créateur d'induction (loi de Lenz). On trouve qualitativement le sens du courant induit pour que la force de Laplace s'oppose au mouvement du circuit.

→ Application

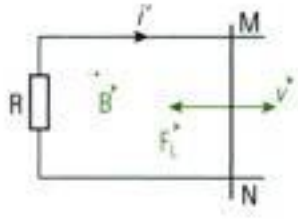
❶ La cause de l'induction est l'augmentation du flux magnétique ϕ. ϕ augmente car la surface du circuit augmente, vu le sens choisi pour la normale $\vec{n}$ du circuit.



❷ Le courant induit i' crée un champ magnétique $\vec{B}'$ dont le sens est lié à celui du courant via la règle du tire bouchon ou du bonhomme d'Ampère.

❸ Le flux inducteur Φ étant positif et croissant avec le temps, il faut que le flux Φ' de $\vec{B}'$ soit négatif : il doit s'opposer à l'augmentation du flux inducteur ϕ. On voit alors que $\vec{B}'$ doit être dirigé selon $-\vec{u}_z$.
Le sens de $\vec{B}'$ est lié à celui du courant induit i' via la règle du tire bouchon : on trouve que le courant induit i' doit aller de M vers N, ce qui est conforme aux résultats quantitatifs trouvés dans les méthodes 1 et 2.

❹ La cause de l'induction est le mouvement du barreau MN. L'intensité i' du courant induit aura donc un sens tel que la force de Laplace $\vec{F}_L$ que subit le barreau MN s'oppose au mouvement du barreau. On en déduit donc le sens de i' via la formule :



$$\vec{F}_L = i' \overrightarrow{MN} \wedge \vec{B}.$$

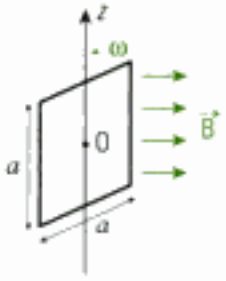
Copyrighted

Exercices

Niveau 1

Ex. 1

Un cadre carré, comportant N spires de côté a, tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz passant par son centre O et parallèle à deux de ses cotés. Il est placé dans un champ magnétique orthogonal à l'axe de rotation, uniforme et constant de norme B.



À l'instant initial, la normale au cadre est parallèle au champ et de même sens.

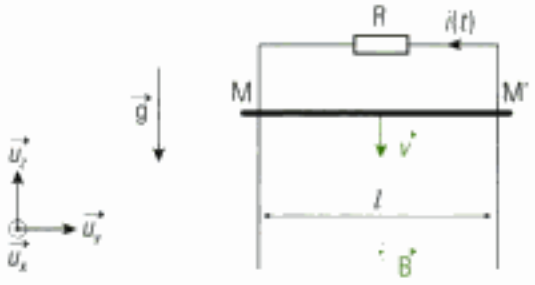
Calculer la force électromotrice e induite dans le cadre en utilisant la loi de Faraday.

Ex. 2

Sur deux rails conducteurs fixes, constitués de deux tiges verticales et parallèles distantes de l, glisse sans frottement une tige horizontale MM', de masse m, grâce à deux contacts glissants M et M'. On considère que l'axe Oz du repère est parallèle aux tiges verticales et l'axe Oy est parallèle à la tige MM'.

On négligera les résistances de la tige MM' et des rails, ainsi que le champ propre produit par les courants induits.

On produit un champ magnétique uniforme et permanent $\vec{B}$, normal au plan du circuit formé par la tige MM' et les rails et dirigé suivant $\vec{u}_z$.



On note $\vec{g} = -g\vec{u}_z$ l'accélération de la pesanteur.

1) Étudier qualitativement l'évolution du système.

2) Les extrémités supérieures des rails sont reliées à un résistor de résistance R. La tige MM' est abandonnée sans vitesse à l'instant $t = 0$. On désignera par $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit et par $v(t)$ la vitesse de la tige, à l'instant t.

a) Déterminer la force électromotrice e induite dans la tige MM'.

b) En déduire l'équation électrique du montage.

c) Établir l'équation mécanique du système.

d) En déduire l'équation différentielle en $i(t)$.

e) Donner la loi d'évolution $i(t)$.

f) Donner la loi d'évolution $v(t)$.

3) Déterminer la puissance des forces de Laplace et l'exprimer en fonction de $i(t)$. Conclure sur la conversion électromécanique.

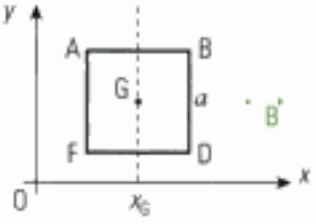
Ex. 3

Un cadre conducteur carré, constitué de N spires de coté a et de résistance R, est en mouvement de translation, rectiligne uniforme, de vitesse $V\vec{u}_x$, dans le plan horizontal Oxy. On néglige l'inductance propre du cadre.

Ce cadre est soumis à l'action d'un champ magnétique :

$$\vec{B}(x, t) = B_m \cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x)\vec{u}_z.$$

À l'instant t, l'abscisse du centre G du cadre est Vt.



1) Déterminer le flux de $\vec{B}$ à travers le cadre.

2) En déduire l'expression de la force électromotrice $e(t)$ induite dans le cadre et l'intensité $i(t)$ du courant qui y circule.

a) Calculer la puissance P des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre.

b) Quelle est sa valeur moyenne $\langle P \rangle$?

c) Montrer que le cadre peut être freiné ou propulsé par les forces de Laplace.

4) Calculer la puissance moyenne reçue par le cadre dans le cas concret suivant :

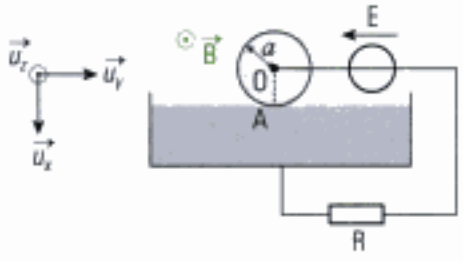
$N = 100$; $a = 0{,}3$ m ; $B_m = 0{,}6$ T ; $\omega = 628$ rad·s^{-1} ; $R = 0{,}25\ \Omega$; $\lambda = 60$ cm et $V = 58{,}8$ m·s^{-2}.

Ex. 4

On envisage un dispositif appelé roue de Barlow constitué d'un disque métallique de rayon a, libre de tourner autour de son axe horizontal Oz avec un moment d'inertie J et plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B} = B\vec{u}_z$ avec $B > 0$. Ce disque est fermé par un fil électrique issu de son centre O et par un contact avec un bain de mercure en un point A sur un générateur de force électromotrice E constante et une résistance R. On néglige la résistance du disque et celle du générateur. On néglige l'inductance propre du circuit. On note $i(t)$

Copyrighted material

l'intensité du courant et $\omega(t)$ la vitesse angulaire de rotation du moteur. Le courant est nul et la roue au repos à l'instant $t = 0$. On allume le générateur à l'instant $t = 0$.



1) Analyser qualitativement le fonctionnement du dispositif.

2) On admet que les forces de Laplace subies par le disque sont équivalentes à celles que subirait un conducteur filiforme confondu avec le rayon OA et parcouru par un courant $i(t)$. Établir l'équation mécanique du problème en supposant que la roue est soumise en outre à un couple de frottements de la forme $-f\vec{\omega}(t)$.

3) Déterminer la force électromotrice e induite entre les points O et A dans la roue.

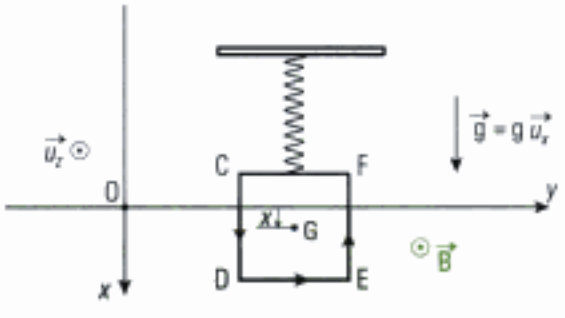
4) En déduire l'équation électrique du problème.

5) Établir l'expression de $\omega(t)$ et commenter l'influence de B.

Niveau 2

Ex. 5

Un cadre de cuivre filiforme, de résistance R, de forme carrée de côté a, de masse m, est accroché à un ressort vertical de raideur k et de masse négligeable. Le plan du cadre est vertical et, à l'équilibre, la moitié inférieure du cadre est située dans un champ magnétique uniforme de module B, stationnaire et perpendiculaire au cadre.



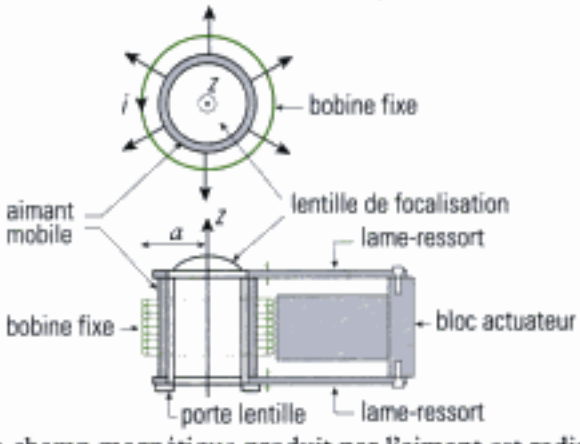
1) On abaisse le cadre d'une hauteur $a/2$ et on le lâche sans vitesse initiale. Établir l'équation différentielle du mouvement du cadre (repéré par sa position par rapport à l'équilibre).

2) On donne $k = 0{,}4$ N·m^{-1}, B = 0,1 T, g = 10 m·s^{-1}, R = 0,5 mΩ, $m = 50$ g et $a = 10$ cm. Déterminer la nature de la loi horaire.

Ex. 6 Modèle électromécanique d'un actuateur

La position d'une lentille permettant la lecture d'un CD doit être constamment ajustée en fonction de la position du CD pour maintenir le diamètre du spot de lecture le plus près possible de sa valeur minimale $d = 1$ µm, quelles que soient les irrégularités de surface du CD.

Le déplacement de la lentille est réalisé au moyen d'un actuateur constitué d'une bobine magnétique fixe et d'un équipage mobile formé d'un aimant mobile creux fixé sur le porte-lentille, lui-même lié au bloc actuateur par deux lames-ressorts. Celles-ci exercent une force de rappel élastique sur l'équipage mobile, de constante de raideur équivalente k.



Le champ magnétique produit par l'aimant est radial à l'extérieur de celui-ci et de module constant B à la distance correspondant au rayon moyen a de la bobine. Cette dernière est de résistance électrique R et de coefficient d'auto-induction L.

Pour les calculs, on supposera la bobine constituée de N spires jointives circulaires de rayon a, coaxiale à l'aimant.

1) Quelle est la nature de la force $\vec{F}$' exercée par le champ magnétique $\vec{B}$ de l'aimant sur la bobine ? Comment est-elle orientée si le courant $i(t)$ circule dans le sens direct autour de l'axe vertical ascendant Oz orienté par le vecteur unitaire $\vec{u}_z$?

On notera A et C les extrémités de la bobine. On la parcourt dans le sens direct en allant de A vers C.

2) Calculer précisément l'expression de cette force en coordonnées cylindriques en fonction de $i(t)$, N, B et a.

3) En déduire l'expression de la force $\vec{F}$ exercée par la bobine sur l'équipage mobile porte-lentille.

4) Soit $z = 0$ la position de repos de l'équipage mobile de masse m, en focalisation parfaite. Lors d'une perturbation (choc, poussière, etc.), l'équipage mobile effectue un déplacement $z(t)$ fonction du temps t. Établir l'équation différentielle mécanique de son mouvement suivant l'axe Oz (on négligera les forces de frottement et le poids).

5) Préciser qualitativement de quels phénomènes d'induction la bobine parcourue par un courant $i(t)$

Copyrighted material

est le siège. On calculera si nécessaire l'expression de la force électromotrice associée à chaque phénomène en utilisant au maximum les données de l'énoncé.

6) La bobine est alimentée par la tension $u_{AC}(t) = u_s(t)$. Représenter le schéma électrique équivalent de la bobine en faisant apparaître l'intensité algébrique $i(t)$ générée par $u_s(t)$. En déduire l'équation électrique de la bobine.

7) On étudie la réponse harmonique de l'actuateur en supposant que toutes les grandeurs u_s, i, z sont des fonctions sinusoïdales de t, de même pulsation imposée ω. On les écrira sous forme complexe $\underline{A}e^{j\omega t}$. Montrer que la fonction de transfert harmonique de l'actuateur est de la forme :

$$H(\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{U}_S} = \frac{H_0}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) + j\frac{\omega}{\omega_2}}.$$

Déterminer les expressions de H_0, ω_0, ω_1 et ω_2 en fonction de N, a, B, k, m, R et L.

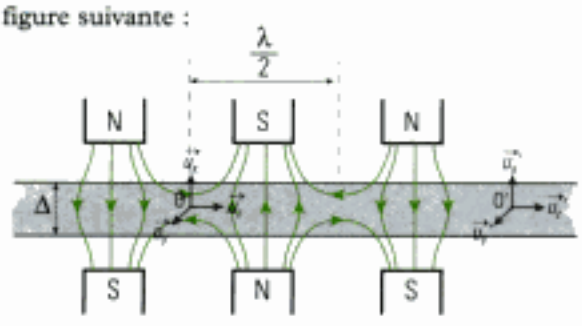
8) *Applications numériques* : $m = 5$ g ; $k = 10$ N·m^{-1} ; N = 300 ; $a = 5$ mm ; R = 10 Ω ; L = 1 mH ; B = 0,2 T.

Calculer ω_0, ω_1 et ω_2.

Tiré de l'écrit ELA 2000

Ex. 7 Freinage par courants de Foucault

On considère une plaque de conductivité électrique σ de perméabilité μ_0 et d'épaisseur Δ située dans un champ magnétique produit par une structure périodique d'aimants permanents de grande dimension dans la direction de $\vec{u}_y$. Les lignes de champ magnétique et la disposition des aimants sont données sur la figure suivante :



Le repère (R) = $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est lié aux aimants, il est fixe ; son origine O est dans le plan équidistant de deux aimants successifs, et $(\vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie pour l'ensemble du système.

Le repère (R') = $(\vec{u'}_x, \vec{u'}_y, \vec{u'}_z)$, d'origine O' est lié à la plaque (repère relatif).

La plaque se déplace avec la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_z$ et on néglige le champ magnétique produit par les courants de Foucault. Le champ magnétique produit par les aimants est de la forme :

$\vec{B} = B_x(x, z)\vec{u}_x + B_z(x, z)\vec{u}_z$ avec $B_x(x, z)$ fonction paire en x et impaire en z et $B_z(x, z)$ impaire en x et paire en z.

Étant donné la périodicité de la distribution des aimants, les composantes B_x et B_z du champ magnétique peuvent être développées en série de Fourrier :

$$B_x(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B^{(n)}_{x,\max}(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right)$$

$$B_z(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} B^{(n)}_{z,\max}(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right)$$

1) Le champ magnétique étant supposé dû aux seuls aimants, il obéit à $\Delta B_x = 0$ et $\Delta B_z = 0$, (propriété que l'on ne cherchera pas à démontrer ici) où Δ est l'opérateur laplacien.

a) Démontrer par des raisons de symétries que $B_x(x, z)$ est une fonction paire en x et impaire en z et $B_z(x, z)$ une fonction impaire en x et paire en z.

b) Trouver les équations différentielles satisfaites par $B^{(n)}_{x,\max}(x)$ et $B^{(n)}_{z,\max}(x)$.

c) Donner les solutions générales de ces équations en tenant compte de la parité en x des composantes $B_x(x, z)$ et $B_z(x, z)$.

2) Utiliser la relation $\text{div}\vec{B} = 0$ pour obtenir les expressions de $B_x(x, z)$ et $B_z(x, z)$ en fonction d'une seule série de coefficients A_n.

3) Quelles sont les composantes du champ magnétique $\vec{B}'$ dans le repère (R') lié à la plaque ?

4) Calculer le champ électromoteur $\vec{E}_m$ induit dans la plaque en mouvement, le vecteur densité de courant $\vec{j}$ et les deux composantes du vecteur densité volumique de force $\frac{d\vec{F}_L}{d\tau} = \vec{j} \wedge \vec{B}$ agissant sur la plaque.

5) Calculer les composantes F_x et F_z de la force magnétique qui s'exerce sur le domaine D :

$$D = \left\{x \in \left[-\frac{\Delta}{2} ; \frac{\Delta}{2}\right] ; y \in [0 ; l] ; z \in \left[-\frac{\lambda}{2} ; \frac{\lambda}{2}\right]\right\},$$

ainsi que la puissance P_f de la force F_z.

6) Calculer la puissance P_J dissipée par effet Joule dans le domaine D.

7) Comparer les puissances P_f et P_J et discuter.

Tiré de l'écrit CCP PC 1999.

Niveau 3

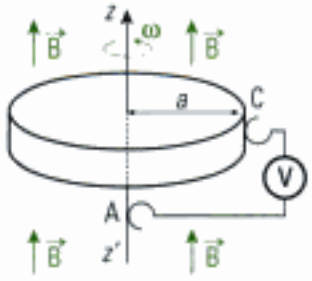
Ex. 8

On peut utiliser des systèmes conducteurs massifs mobiles dans un champ magnétique pour créer des générateurs dits « unipolaires » et capables de produire des intensités électriques très élevées avec de petites forces électromotrices. Nous étudions l'un de ces systèmes, constitué par un disque conducteur homogène, de masse m et de rayon a en rotation autour d'un axe $z'z$ conducteur (de rayon négligeable devant a) avec la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega\vec{u}_z$ imposée par un moteur, et plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{u}_z$, dit « axial ».

Copyrighted material

1) Étude du disque « isolé »

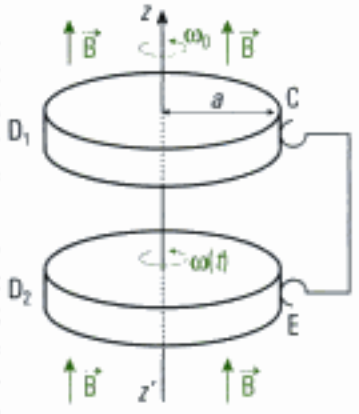
a) Si l'on branche un voltmètre de grande impédance en deux contacts glissants A et C, A étant un point de l'axe et C un point de la périphérie du disque, quelle sera l'expression de la différence de potentiel $V_A - V_C$ mesurée par le voltmètre ?



b) Si, à l'origine des dates, on enlève le moteur qui imposait la vitesse angulaire, quel sera le mouvement ultérieur du disque, sachant que sa vitesse angulaire « initiale » est égale à ω_0 ? On supposera les frottements absents (négligeables).

2) Étude d'un système de deux disques

On considère maintenant deux disques conducteurs identiques au précédent D_1 et D_2, coaxiaux et plongés dans le même champ magnétique axial.



On constitue un circuit fermé en reliant par un fil deux contacts glissants de la périphérie de chacun des disques entre eux (l'axe de rotation $z'z$ est conducteur). Le disque D_1 est entraîné par un moteur qui maintient sa vitesse angulaire constante et égale à ω_0, le disque D_2 étant maintenu immobile. À l'origine des dates, on lâche le disque D_2. On notera $\omega(t)$ la vitesse angulaire du disque D_2.

a) Établir l'expression de la force électromotrice $e(t)$ qui apparaît dans le circuit en fonction de $\omega(t)$ et des autres données.

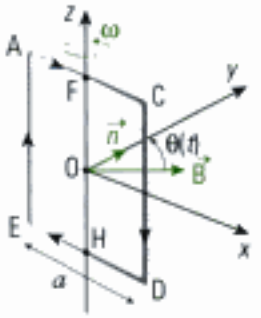
b) Soit R la résistance radiale de chacun des disques, celles de l'axe et du fil pouvant être négligées. Quelle sera alors l'expression de l'intensité i du courant induit en fonction de $\omega(t)$? On admettra alors que le courant reste radial dans chacun des disques. On précisera son sens dans le circuit.

c) Déterminer l'expression du moment que subit le disque D_2, en fonction de i, puis de $\omega(t)$, et des autres données. Son sens pouvait-il être prévu ?

d) Sachant que le moment d'inertie J d'un disque homogène de masse m et de rayon a par rapport à l'axe $z'z$ vaut $J = \frac{ma^2}{2}$, déterminer l'expression de la loi $\omega(t)$ en fonction du temps t et des constantes ω_0, B, R, m et a. Tracer la courbe donnant ses variations temporelles.

Ex. 9 Étude d'une antenne réceptrice

Un cadre carré ACDE, de côté a, tourne à vitesse angulaire constante ω autour de l'axe Oz passant par son centre O et parallèle à deux de ses cotés. Il est placé dans un champ magnétique orthogonal à l'axe de rotation, uniforme et constant de norme B.



À l'instant initial, la normale au cadre est parallèle au champ et de même sens. L'orientation du cadre est donné sur la figure. Le repère $Oxyz$ est lié au cadre de sorte que O est le centre du cadre et $\vec{u}_y$ est la normale au cadre.

Application numérique : a = 20 cm, ω = 4 rad·s^{-1} et B = 10^{-5} T.

Le cadre est en court-circuit et chacun des cotés a pour résistance R = 2 Ω.

1) Recherche du courant induit dans le cadre par une méthode « de Lorentz ».

a) Déterminer l'expression de la force électromotrice e d'induction dans le cadre.

b) Déterminer l'expression de l'intensité i du courant induit.

2) Étude énergétique. On néglige tout frottement.

a) Calculer la puissance moyenne $\langle P_J \rangle$ dissipée par l'effet Joule dans le cadre.

b) Établir l'expression de la résultante $\vec{F}_L$ des forces de Laplace qui s'exercent sur le cadre.

c) Déterminer l'expression du moment résultant $\vec{M}_O(\vec{F}_L)$ au point O de ces forces de Laplace.

d) Quelle la puissance moyenne $\langle P_L \rangle$ fournie au cadre par les forces de Laplace ?

e) En déduire la puissance moyenne $\langle P \rangle$ que doit fournir le moteur qui entraîne le cadre pour maintenir sa vitesse angulaire constante et égale à ω. Faire l'application numérique.

3) Transformation de l'antenne en teslamètre. On souhaite déduire la valeur de B_0 à partir d'une mesure électrique effectuée dans le circuit.

a) On projette de brancher un voltmètre entre les deux points fixes du cadre, F et H. Exprimer la différence de potentiel $V_F - V_H$ qu'il mesure, sachant que son impédance est très supérieure à 4R. Conclure quant à la possibilité de transformer ce voltmètre en teslamètre.

b) On ajoute un ampèremètre en série sur le cadre en le plaçant aux bornes du cadre coupé au point F. Sa résistance interne vaut R' = 8 Ω. Déterminer l'expression de l'intensité i' qu'il mesure. Calculer numériquement l'amplitude de i'. Conclure quant à la possibilité de transformer cet ampèremètre en teslamètre.

Copyrighted material

Hidden page

miner son expression en fonction des intensités et de $\frac{dM}{dz}$.

4) La bobine plate réagit avec un temps de réponse grand par rapport à la période du courant. Elle est de ce fait sensible à la moyenne temporelle de la force magnétique. Quel devrait être le mouvement de la bobine plate ?

5) Un opérateur fait l'expérience. Il observe que la bobine plate est projetée vers le haut et se stabilise à une certaine hauteur. Conclure sur la validité du modèle précédent.

6) On utilise alors un autre modèle dans lequel la bobine plate possède une inductance propre L_2 et une résistance R_2. Le solénoïde de résistance R_1 et d'inductance propre L_1 est alimenté par une tension sinusoïdale $V(t) = U\cos\omega t$.

a) Écrire la loi des mailles dans le solénoïde si on suppose que le coefficient d'induction mutuelle est $M(z)$.

b) Écrire la loi des mailles dans la bobine plate.

c) En déduire les expressions complexes de i_1 et de i_2 en fonction de U et des caractéristiques des bobines.

d) On trouve $i_1(t) = 0{,}4\cos(\omega t - 1{,}39)$ et $i_2(t) = 26\cos(\omega t - 3{,}07)$. Les courants sont exprimés en Ampère et les angles en radian.

D'après l'étude faite en question **4)** et sachant que la bobine plate réagit avec un temps de réponse grand par rapport à la période du courant, étudier le sens de la force de Laplace et interpréter le résultat de l'expérience décrite à la question **5)**.

Indications

Ex. 1

On pose un repère $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ tel que $\vec{B} = B\vec{u_x}$. On trouve ensuite l'expression de la normale $\vec{n}$ du cadre dans ce repère en fonction de ω.

Il ne faut pas oublier que le flux à travers un cadre comportant N spires et égal à N fois le flux à travers une spire dans le cadre de cet exercice.

Ex. 3

On donne $\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$

et $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

c) Étudier le signe de la puissance moyenne.

Ex. 4

2) Il est nécessaire de bien identifier le sens de rotation de la roue pour orienter correctement le vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega}$. Le courant $i(t)$ est fourni par le générateur de force électromotrice E. Il est donc orienté dans le même sens que E.

On utilise le théorème du moment cinétique puisqu'il s'agit d'un mouvement de rotation autour d'un axe.

Ex. 5

1) On détermine la force électromotrice et le courant induit à partir du flux du champ magnétique. Ensuite, on en déduit la force de Laplace appliquée au cadre.

Ex. 6

5) La bobine est étudiée dans un référentiel lié à l'équipage mobile.

Ex. 9

1) a) On travaille dans le repère cartésien tournant et on exprime le champ magnétique $\vec{B}$ en fonction des vecteurs de base. On distingue deux parties du cadre où l'expression du champ magnétique est différente. On utilise l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m$ pour un circuit mobile dans un champ uniforme.

2) a) On utilise l'expression de $i(t)$ trouvée à la question **1) b)**.

b) On utilise des éléments de symétrie.

c) On distingue six parties du cadre.

Ex. 10

2) On considère deux phénomènes d'induction.

Copyrighted material

Solutions des exercices

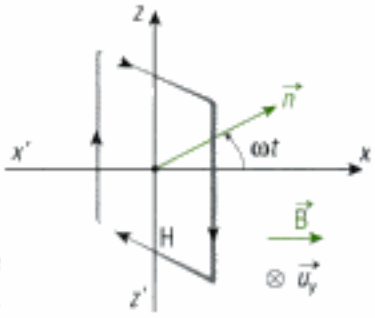
Exercices de niveau 1

Exercice 1

On met en œuvre la méthode n° 2.

Tout d'abord, on pose un repère $(O, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ tel que : $\vec{B} = B\vec{u_x}$. On définit ensuite la normale $\vec{n}$ au circuit telle que $\vec{n}(t = 0) = \vec{u_x}$: $\vec{n} = \cos\omega t\,\vec{u_x} + \sin\omega t\,\vec{u_y}$.

On oriente alors le cadre tel que sa normale soit $\vec{n}$.



Le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers une spire est donné par $\Phi = N\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ où S est la surface du cadre.

Or $\vec{B}\cdot d\vec{S} = BdS\cos\omega t$.

D'où : $\Phi = BS\cos\omega t = Ba^2\cos\omega t$.

Le flux à travers chaque spire du cadre est identique. De ce fait, le flux Φ_C à travers le cadre est égal à N fois le flux à travers une spire.

On trouve alors $\Phi_C = N\Phi = NBa^2\cos\omega t$.

On en déduit la force électromotrice à partir de la loi de Faraday :

$$e = -\frac{d\Phi_C}{dt}$$ où e est orienté dans le sens du contour.

On trouve alors : $\boldsymbol{e = NBa^2\omega\sin\omega t}$.

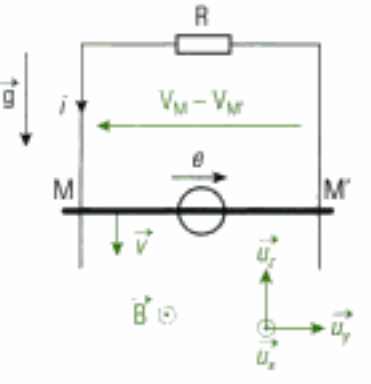
Exercice 2

1) Le rail mobile est soumis à son poids. Il va donc se mettre en mouvement.

Ce rail est placé dans un circuit conducteur fermé. Sa mobilité est alors source de courant induit dans le circuit. Ce rail parcouru par le courant induit placé dans le champ magnétique $\vec{B}$ est soumis à la force de Laplace. D'après la loi de Lenz, cette force s'oppose au mouvement de la barre et est dirigée selon $\vec{u_x}$.

Il faut maintenant réaliser une étude plus poussée pour connaître l'évolution du mouvement du rail.

2) On met en œuvre la méthode n° 1.



a) Par définition, $e = \int_M^{M'} \vec{E}_m\cdot d\vec{l}$ où $\vec{E}_m = \vec{v}\wedge\vec{B}$, $\vec{v}$ est la vitesse du rail et $d\vec{l} = dy\vec{u_y}$ dans le sens M vers M'.

On peut supposer que le rail se déplace dans le sens de $\vec{g}$ puisqu'il est au départ soumis à son poids. Donc $\vec{v} = -v(t)\vec{u_x}$.

On en déduit $\vec{E}_m = -v(t)B\vec{u_y}$ soit $e = \int_0^l -v(t)B\,dy$.

D'où : $\boldsymbol{e = -v(t)Bl}$.

On peut aussi calculer les flux ϕ et $\phi + d\phi$ du champ magnétique à travers la surface délimitée par les rails et la résistance R aux deux instants consécutifs t et $t + dt$. La surface vaut alors respectivement S et $S + vdt$. On en déduit la force électromotrice par la loi de Faraday.

Copyrighted material

b) Le rail est placé dans un montage constitué d'une résistance R et de conducteurs fixes de résistance négligeable devant R.

Le rail, de résistance négligeable, est équivalent à un générateur de tension parfait.

On a : $V_M - V_{M'} = -e = -Ri(t)$ dans le sens indiqué sur le schéma.

On en déduit l'équation électrique :

$$\boldsymbol{e = Ri(t) = -v(t)Bl.} \quad \textbf{(1)}$$

c) Afin d'établir l'équation mécanique, il faut étudier les forces qui s'exercent sur le rail.

Le rail est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ et à la force de Laplace, puisqu'il est parcouru par un courant $i(t)$, $\vec{F}_L = \int_M^{M'} i(t)\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B} = -i(t)Bl\vec{u}_z$ où $\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}y\vec{u}_y$ est orienté dans le sens M vers M'.

On met en œuvre la méthode n° 3 pour vérifier le sens du courant.

Dans cet exemple, $v(t)$ est supposé positif et le courant induit est donc négatif. On retrouve donc une force de Laplace orientée dans le sens inverse du poids qui s'oppose donc aux causes du mouvement.

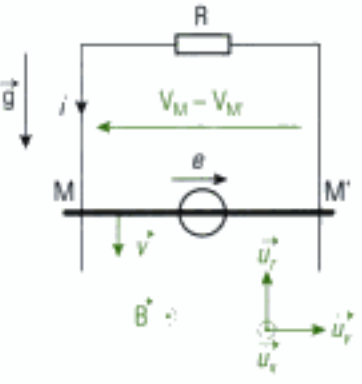
La loi de Lenz est bien vérifiée.

On applique la deuxième loi de Newton au rail :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{F}_L = [-mg - i(t)Bl]\vec{u}_z.$$

Avec la notation $\vec{v} = -v(t)\vec{u}_z$, on en déduit l'équation mécanique :

$$\boldsymbol{-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - i(t)Bl.} \quad \textbf{(2)}$$



d) À partir des équations (1) et (2), on obtient par substitution :

$$\boldsymbol{\frac{mR}{(Bl)^2}\frac{\mathrm{d}i(t)}{\mathrm{d}t} + i(t) = \frac{-mg}{Bl}}. \quad \textbf{(3)}$$

e) L'équation **(3)** est une équation différentielle du premier ordre dont la solution est la somme d'une solution générale de l'équation sans second membre $i_g(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ où $\tau = \frac{mR}{(Bl)^2}$ et de la solution particulière de l'équation avec second membre $i_p(t) = \frac{-mg}{Bl}$.

Alors : $i(t) = i_g(t) + i_p(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}} - \frac{mg}{Bl}$.

Or le courant est nul à l'instant $t = 0$ car la barre est immobile à cet instant.

On en déduit : $A = \frac{mg}{Bl}$.

D'où : $$\boldsymbol{i(t) = \frac{-mg}{Bl}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} \text{ avec } \tau = \frac{mR}{(Bl)^2}.$$

d) On déduit de l'équation **(1)** : $$\boldsymbol{v(t) = \frac{-R}{Bl}i(t) = \frac{mgR}{(Bl)^2}(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})}.$$

3) La puissance des forces de Laplace est de la forme

$$\boldsymbol{P = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -i(t)Bl\vec{u}_z \cdot -v(t)\vec{u}_z = i(t)Blv(t) = -R[i(t)]^2}.$$

On note que cette puissance est égale à celle dissipée par effet Joule dans le résistor. On peut en conclure qu'il y a transfert d'énergie.

L'énergie mécanique reçue par le rail du fait de son mouvement est transformée en énergie électrique qui est fournie au circuit extérieur.

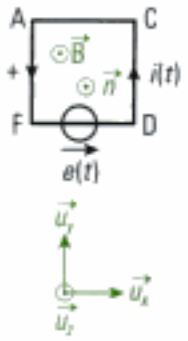
Le circuit extérieur étant une résistance, elle dissipe cette énergie sous forme thermique (effet Joule).

Copyright material

Exercice 3

1) On met en œuvre la méthode n° 2.

Le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers chaque spire du cadre est identique. Donc le flux Φ à travers le cadre est égal à N fois le flux à travers une spire. On oriente le cadre dans le sens AFDC, la normale au cadre est donc $\vec{n} = \vec{u}_z$:



$$\Phi(t) = N\iint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = N\iint_S B_m \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)dxdy = NB_m a\int_{x_G-\frac{a}{2}}^{x_G+\frac{a}{2}} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)dx.$$

D'où : $\Phi(t) = \dfrac{NB_m a\lambda}{2\pi}\left[\sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(x_G + \dfrac{a}{2}\right)\right) - \sin\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(x_G - \dfrac{a}{2}\right)\right)\right]$.

On se rappelle de la formule trigonométrique : $\sin p - \sin q = 2\sin\dfrac{p-q}{2}\cos\dfrac{p+q}{2}$.

$x_G = Vt$ donne alors : $$\boldsymbol{\Phi(t) = -\frac{NB_m a\lambda}{\pi}\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}Vt\right).}$$

2) Par définition, $e(t) = -\dfrac{d\Phi(t)}{dt}$ si e est orienté dans le sens AFDC.

On a donc : $$\boldsymbol{e(t) = \frac{NB_m a\lambda}{\pi}\left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda}V\right)\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}Vt\right).}$$

L'équation électrique est la suivante : $0 = Ri(t) - e(t)$ où $i(t)$ est orienté dans le sens AFDC.

D'où : $$\boldsymbol{i(t) = \frac{NB_m a\lambda}{\pi R}\left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda}V\right)\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}Vt\right).}$$

3) a) On étudie la puissance des forces de Laplace qui s'exercent sur chaque portion du cadre.

• Sur la portion AF, la force de Laplace est :

$$\vec{F}_{L1} = \int_A^F i(t)d\vec{l}\wedge\vec{B} = -\int_0^a i(t)B_m\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_G - \frac{a}{2}\right)\right)dy\ \vec{u}_y\wedge\vec{u}_z.$$

D'où : $\vec{F}_{L1} = -i(t)B_m a\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(x_G - \dfrac{a}{2}\right)\right)\vec{u}_x$.

• Sur la portion FD, la force de Laplace est :

$$\vec{F}_{L2} = \int_F^D i(t)d\vec{l}\wedge\vec{B} = \int_0^a i(t)B_m\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)dx\ \vec{u}_x\wedge\vec{u}_z.$$

Cette force est dirigée selon $\vec{u}_y$, donc dans une direction orthogonal au déplacement. La puissance est donc nulle pour cette force.

• Sur la portion DC, la force de Laplace est :

$$\vec{F}_{L3} = \int_D^C i(t)d\vec{l}\wedge\vec{B} = \int_0^a i(t)B_m\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_G + \frac{a}{2}\right)\right)dy\ \vec{u}_y\wedge\vec{u}_z.$$

D'où : $\vec{F}_{L3} = i(t)B_m a\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}\left(x_G + \dfrac{a}{2}\right)\right)\vec{u}_x$.

• Sur la portion CA, la force de Laplace est :

$$\vec{F}_{L4} = \int_C^A i(t)d\vec{l}\wedge\vec{B} = -\int_0^a i(t)B_m\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)dx\ \vec{u}_x\wedge\vec{u}_z.$$

Cette force est dirigée selon $\vec{u}_y$, donc dans une direction orthogonal au déplacement. La puissance est donc nulle pour cette force.

Copyrighted material

• La puissance des forces de Laplace est égale à N fois la puissance des forces de Laplace sur une spire : $P = N(\vec{F}_{L1}\cdot V\vec{u}_x + \vec{F}_{L3}\cdot V\vec{u}_x)$.

D'où : $P = Ni(t)B_m aV\left[\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_G + \frac{a}{2}\right)\right) - \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}\left(x_G - \frac{a}{2}\right)\right)\right]$.

On se rappelle de la formule trigonométrique : $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$.

$x_G = Vt$ donne alors : $P = 2Ni(t)B_m aV\sin\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}Vt\right)$.
En remplaçant $i(t)$, on obtient :

$$\mathbf{P = \frac{2N^2B_m^2a^2V\lambda}{\pi R}\left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda}V\right)\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)\sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}Vt\right)}.$$

b) La valeur moyenne est définie par $\langle P\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T P\,dt$.

Le calcul de $\langle P\rangle$ revient au calcul de $\langle\sin^2(\omega t + \varphi)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)dt$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
Or,

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi)dt = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos(2\omega t + \varphi)}{2}\,dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4T\omega}\left[\sin(2\omega t + \varphi)\right]_0^T = \frac{1}{2}.$$

La valeur moyenne de $\sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}Vt\right)$ est donc égale à $\frac{1}{2}$.

Alors : $$\mathbf{\langle P\rangle = \frac{N^2B_m^2a^2V\lambda}{\pi R}\left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda}V\right)\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\right)}.$$

Cette expression est vraie pour tout λ, même pour $\lambda = \frac{2\pi V}{\omega}$.

$\langle P\rangle$ représente la puissance fournie par les forces de Laplace au cadre.

On pourra retenir que $\langle\sin\rangle = \langle\cos\rangle = 0$ et $\langle\sin^2\rangle = \langle\cos^2\rangle = \frac{1}{2}$.

c) Si $\lambda > \frac{2\pi V}{\omega}$, le cadre est propulsé par le champ magnétique puisque $\langle P\rangle > 0$, c'est-à-dire qu'il reçoit de la puissance mécanique.

Si $\lambda < \frac{2\pi V}{\omega}$, **le cadre est freiné** par le champ magnétique puisque $\langle P\rangle < 0$, c'est-à-dire qu'il fournit de la puissance.

4) *Application numérique* : $\mathbf{\langle P\rangle = 178\ kW}$.

Exercice 4

1) Le générateur de force électromotrice E engendre un courant dans le circuit fermé formé par la roue et la résistance R.

Ce courant traverse la roue qui est placée dans un champ magnétique. Elle est donc soumise à une force de Laplace qui la met en mouvement.

Il apparaît dans cette roue conductrice en mouvement dans un champ magnétique uniforme un champ électromoteur. La roue est donc le siège d'une force électromotrice induite.

Cette force électromotrice induite doit s'opposer aux causes de l'induction, c'est-à-dire à la force électromotrice E grâce à laquelle la roue est mise en mouvement.

Copyright material

Hidden page

La solution est la somme d'une solution générale de l'équation sans second membre $\omega_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ et de la solution particulière de l'équation avec second membre $\omega_2(t) = \frac{Ba^2E}{2RJ}\tau$.

Le moteur est au repos à l'instant $t = 0$ donc $A = -\frac{Ba^2E}{2RJ}\tau$.

On obtient donc : $$\omega(t) = \frac{Ba^2E}{2RJ}\tau(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

La vitesse de rotation de la roue tend vers une limite finie :

$$\omega_{lim} = \frac{Ba^2E}{2RJ}\tau = \frac{Ba^2E}{2R}\frac{1}{f + \frac{B^2a^4}{4R}}.$$

La constante de temps τ est d'autant plus petite que l'amplitude du champ magnétique est élevée, la vitesse de rotation de la roue tend alors plus rapidement vers la vitesse limite. **Le système réagit ainsi d'autant plus rapidement que le champ magnétique est important.**

Exercices de niveau 2

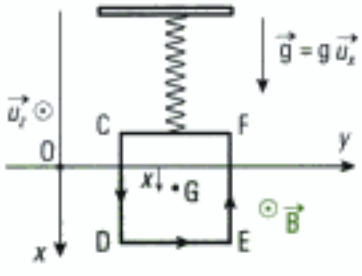
Exercice 5

1) Le cadre est traversé par un flux magnétique variable, du fait de son mouvement. Il est donc parcouru par un courant induit et soumis à des forces de Laplace.

L'objectif est d'abord de déterminer la force électromotrice e induite dans le cadre puis le courant pour enfin trouver les forces de Laplace.

On met en œuvre la méthode n° 2.

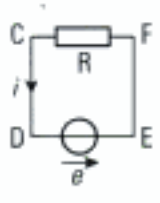
• Le flux du champ magnétique à travers la surface du cadre est $\Phi = a(x + \frac{a}{2})B$ si on oriente le cadre dans le sens indiqué sur la figure ci-dessous. x représente la position du centre G du cadre par rapport à la position d'équilibre.



⚠ On suppose que $x(t) \in [-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}]$ lors de l'évolution du cadre. Cette condition se comprend physiquement : le cadre n'ayant pas d'apport d'énergie et dissipant son énergie potentielle initiale par effet Joule dans sa résistance, il va osciller dans l'intervalle $x(t) \in [-\frac{a}{2}; \frac{a}{2}]$.

• On en déduit la force électromotrice e induite dans le cadre : $e = -\frac{d\Phi}{dt} = -aB\frac{dx}{dt}$ dans le sens indiqué sur la figure.

• Le cadre est un circuit fermé et on applique la loi des mailles : $0 = Ri - e$.



D'où $i = -\frac{aB}{R}\frac{dx}{dt}$.

• Le cadre est soumis à la force de Laplace :

$\vec{F}_L = \int_C^D i(t)d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_D^E i(t)d\vec{l} \wedge \vec{B} + \int_E^F i(t)d\vec{l} \wedge \vec{B}$, avec $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

⚠ On remarque que le segment [CF] du cadre n'est jamais plongé dans le champ $\vec{B}$.

$$\vec{F}_L = \int_0^{x+\frac{a}{2}} -iBdx\vec{u}_y + \int_0^a iBdy\vec{u}_x + \int_0^{x+\frac{a}{2}} iBdx\vec{u}_y.$$

On en déduit : $\vec{F}_L = iBa\vec{u}_x = -\frac{a^2B^2}{R}\frac{dx}{dt}\vec{u}_x$.

Copyright © material

La force de Laplace vérifie bien la loi de Lenz puisqu'elle s'oppose au mouvement du cadre.

• Le cadre est soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{u}_x$, la force de rappel $\vec{F}_R = -kx\vec{u}_x$ et la force de Laplace $\vec{F}_L = -\frac{a^2B^2}{R}\frac{dx}{dt}\vec{u}_x$.

La deuxième loi de Newton projetée sur l'axe Ox permet d'écrire :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{a^2B^2}{R}\frac{dx}{dt} - kx + mg.$$

2) L'équation mécanique est alors $\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 8x = 10$.

On résout l'équation caractéristique $r^2 + 4r + 8 = 0$.

Les solutions sont $r_1 = -2 + 2j$ et $r_2 = -2 - 2j$.

Donc $\underline{x}(t) = \underline{A}e^{r_1 t} + \underline{B}e^{r_2 t}$, ce qui donne en notation réelle : $x(t) = Ae^{-2t}\cos(2t + \varphi)$. Il s'agit d'un mouvement pseudo-sinusoïdal.

À l'instant $t = 0$, $x(t = 0) = \frac{a}{2}$ et $\frac{dx}{dt}(t = 0) = 0$. On a donc : $A\cos\varphi = \frac{a}{2}$ et $-2A\sin\varphi = 0$.

On en conclut $\varphi = 0$ et $A = \frac{a}{2}$, ce qui donne : $\boldsymbol{x(t) = \frac{a}{2}e^{-2t}\cos(2t)}$.

Le cadre oscille autour de sa position d'équilibre et revient avec une constante de temps égale à 0,5 seconde. Au bout de 2,5 secondes, il n'oscille alors quasiment plus et a trouvé sa position stable $x = 0$.

Exercice 6

1) La bobine, parcourue par un courant $i(t)$, est placée dans le champ magnétique créé par l'aimant.

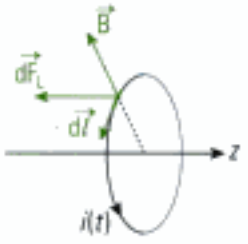
Elle est donc soumise à une force de Laplace : $\vec{F'} = \int_{\text{bobine}} i(t)d\vec{l} \wedge \vec{B}$.

La bobine est orientée dans le sens direct, donc, dans une base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, on a $d\vec{l} = ad\theta\vec{u}_\theta$.

Le champ magnétique est radial $\vec{B} = B\vec{u}_r$.

D'où $i(t)d\vec{l} \wedge \vec{B} = -i(t)aBd\theta\vec{u}_z$.

On en déduit que **la force $\vec{F'}$ est dirigé suivant $\vec{u}_z$**.



2) On a $\vec{F'} = \int_A^C i(t)d\vec{l} \wedge \vec{B} = -\int_0^{2N\pi} i(t)aBd\theta\vec{u}_z$.

Donc : $$\boldsymbol{\vec{F'} = -i(t)2N\pi aB\vec{u}_z}.$$

3) La force exercée par l'équipage mobile sur la bobine est $\vec{F'} = -i(t)2N\pi aB\vec{u}_z$. Par application de la troisième loi de Newton (ou principe des actions réciproques), la force exercée par la bobine sur l'équipage mobile est donc : $\vec{F}_b = -\vec{F'} = i(t)2N\pi aB\vec{u}_z$.

4) L'équipage mobile est soumis à la force exercée par les lames-ressort $\vec{F}_R = -kz\vec{u}_z$ et à celle exercée par la bobine $\vec{F}_b$.

La projection de la deuxième loi de Newton sur l'axe Oz donne l'équation de la mécanique :

$$m\frac{d^2z}{dt^2} = -kz + i(t)2N\pi aB. \quad (1)$$

5) • La bobine est parcourue par un courant variable au cours du temps. Elle est donc soumise à un phénomène **d'auto-induction « de Neumann »** qui engendre une force électromotrice induite $\boldsymbol{e_1(t) = -L\frac{di(t)}{dt}}$.

Copyrighted material

La bobine est mobile dans un champ magnétique uniforme. Elle est donc soumise à un **phénomène d'induction « de Lorentz »** qui engendre une force électromotrice $e_2(t) = \int_{\text{bobine}} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$ où $d\vec{l} = a d\theta \vec{u}_\theta$.

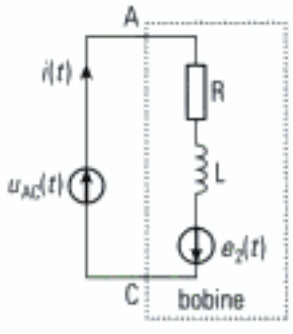
Or, $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$ où $\vec{v} = -\frac{dz(t)}{dt}\vec{u}_z$ est la vitesse de la bobine dans un référentiel lié à l'équipage mobile.

On trouve alors $e_2(t) = -\int_A^C \frac{dz(t)}{dt} a B d\theta = -\int_0^{2N\pi} \frac{dz(t)}{dt} a B d\theta$.

D'où : $$\boldsymbol{e_2(t) = -2\pi N a B \frac{dz(t)}{dt}}.$$

On retrouve ici la propriété de couplage électromécanique parfait. En effet, la puissance électrique reçue par la bobine due à la force électromotrice d'induction est : $P_e = e_2(t)i(t) = -2\pi N a B \frac{dz(t)}{dt} i(t)$ et la puissance mécanique reçue par la bobine due aux forces de Laplace est : $P_L = \vec{F} \cdot \vec{v} = [-i(t)2N\pi a B](-\frac{dz(t)}{dt})$. On retrouve bien : $P_L + P_e = 0$.

6) La bobine est équivalente à l'association série d'une résistance R, d'une inductance L et d'une force électromotrice e_2 orientée de A vers C.



On obtient :

$$\boldsymbol{u_{AC}(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} - e_2(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + 2\pi N a B \frac{dz(t)}{dt}}. \quad (2)$$

7) On est en régime sinusoïdal forcé, on travaille donc en complexe.

Les équations (1) et (2) donnent :

$$-m\omega^2 \underline{Z} = -k\underline{Z} + 2N\pi a B \underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{U}_s = R\underline{I} + jL\omega\underline{I} + j\omega 2\pi N a B \underline{Z}.$$

On obtient la relation entre $\underline{Z}$ et $\underline{U}_s$ par substitution dans les équations précédentes :

$$\underline{U}_s = (R + jL\omega)\frac{k - m\omega^2}{2N\pi a B}\underline{Z} + j\omega 2\pi N a B \underline{Z}.$$

La fonction de transfert est définie par $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{Z}}{\underline{U}_s}$.

On en déduit : $$\boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \frac{2N\pi a B}{Rk} \frac{1}{\left(1 + j\frac{L}{R}\omega\right)\left(1 - \frac{m}{k}\omega^2\right) + j\frac{(2N\pi a B)^2}{Rk}\omega}}.$$

Ceci donne : $\boldsymbol{H_0 = \frac{2N\pi a B}{Rk}}$, $\boldsymbol{\omega_1 = \frac{R}{L}}$, $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\boldsymbol{\omega_2 = \frac{Rk}{(2N\pi a B)^2}}$.

8) *Application numérique* : $\boldsymbol{\omega_0 = 45\ rad \cdot s^{-1}}$, $\boldsymbol{\omega_1 = 10^4\ rad \cdot s^{-1}}$ et $\boldsymbol{\omega_2 = 28\ rad \cdot s^{-1}}$.

Exercice 7

1) a) Le plan Oxy est un plan d'anti-symétrie pour les aimants et donc pour le champ magnétique $\vec{B}$ (voir sur la figure).

De ce fait, en deux points M et N symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan, on a $B_x(M) = -B_x(N)$ et $B_z(M) = B_z(N)$.

Or, M et N ont même abscisse x et des cotes z opposées, donc $B_x(x, z) = -B_x(x, -z)$ et $B_z(x, z) = B_z(x, -z)$.

On montre bien que **$B_x(x, z)$ est une fonction impaire en z et $B_z(x, z)$ paire en z.**

Copyright material

Le plan Oyz est un plan d'anti-symétrie pour les aimants et donc pour le champ magnétique $\vec{B}$ (voir sur la figure).

De ce fait, en deux points M et N symétriques l'un de l'autre par rapport à ce plan, on a $B_x(M) = B_x(N)$ et $B_z(M) = -B_z(N)$.

Or, M et N ont des abscisses x opposées et des cotes z identiques, donc $B_x(x, z) = B_x(-x, z)$ et $B_z(x, z) = -B_z(-x, z)$.

On montre bien que **$B_x(x, z)$ est une fonction paire en x et $B_z(x, z)$ impaire en x.**

b) • On a $\Delta B_x = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 B_x(x, z)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 B_x(x, z)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 B_x(x, z)}{\partial z^2} = 0.$

Ceci donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\dfrac{\partial^2 B_{x,\max}^{(n)}(x)}{\partial x^2} \sin\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right) - \left(\dfrac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 B_{x,\max}^{(n)}(x) \sin\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right) \right] = 0.$

Ceci est vérifié pour toute valeur de z, donc : $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 B_{x,\max}^{(n)}(x)}{\partial x^2} - \left(\dfrac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 B_{x,\max}^{(n)}(x) = 0.}$

$\forall\, x$ fixé, la série de Fourier $z \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\dfrac{\partial^2 B_{x,\max}^{(n)}(x)}{\partial x^2} - \left|\dfrac{2\pi n}{\lambda}\right|^n B_{x,\max}^{(n)}(x) \right] \sin\left|\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right|$ est nulle.

Or $z \mapsto 0$ est une fonction λ-périodique et C^1. Par le théorème de Dirichlet, $z \mapsto 0$ est donc égale à sa série de Fourier : $0 = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[0 \cdot \cos\left|\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right| + 0 \cdot \cos\left|\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right| \right]$.

Par identification des coefficients de Fourier, on a donc $\forall\, (x, n) \in \left[-\dfrac{\Delta}{2}; \dfrac{\Delta}{2}\right] \times \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\partial^2 B_{x,\max}^{(n)}(x)}{\partial x^2} - \left(\dfrac{2\pi n}{\lambda}\right)^n B_{x,\max}^{(n)}(x) = 0.$

• On a $\Delta B_z = 0 \Leftrightarrow \dfrac{\partial^2 B_z(x, z)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 B_z(x, z)}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 B_z(x, z)}{\partial z^2} = 0.$

Ceci donne : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\dfrac{\partial^2 B_{z,\max}^{(n)}(x)}{\partial x^2} \cos\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right) - \left(\dfrac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 B_{z,\max}^{(n)}(x) \cos\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right) \right] = 0.$

Ceci est toujours vérifié donc : $\boldsymbol{\dfrac{\partial^2 B_{z,\max}^{(n)}(x)}{\partial x^2} - \left(\dfrac{2\pi n}{\lambda}\right)^2 B_{z,\max}^{(n)}(x) = 0.}$

c) La solution de ce type d'équation est de la forme :

$B_{x,\max}^{(n)}(x) = A_n \exp\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right) + B_n \exp\left(-\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right)$ et $B_{z,\max}^{(n)}(x) = A'_n \exp\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right) + B'_n \exp\left(-\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right).$

• La fonction $B_{x,\max}^{(n)}(x)$ est paire donc $B_{x,\max}^{(n)}(x) = B_{x,\max}^{(n)}(-x)$ ce qui donne $A_n = B_n$.

On a alors : $\boldsymbol{B_{x,\max}^{(n)}(x) = 2A_n \operatorname{ch}\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right).}$

• La fonction $B_{z,\max}^{(n)}(x)$ est impaire donc $B_{z,\max}^{(n)}(x) = -B_{z,\max}^{(n)}(-x)$ ce qui donne $A'_n = -B'_n$.

On a alors : $\boldsymbol{B_{z,\max}^{(n)}(x) = 2A'_n \operatorname{sh}\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right).}$

2) On a : $\operatorname{div}\vec{B} = \dfrac{\partial B_x(x, z)}{\partial x} + \dfrac{\partial B_z(x, z)}{\partial z} = 0.$

D'où : $\sum_{n=1}^{+\infty} \left[\dfrac{4\pi n}{\lambda} A_n \operatorname{sh}\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right) - \dfrac{4\pi n}{\lambda} A_n \operatorname{sh}\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right) \right] = 0.$

Ceci est vérifié $\forall (x, z)$ donc $A'_n = A_n$.

Donc : $\boldsymbol{B_x(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2A_n \operatorname{ch}\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right)}$ et $\boldsymbol{B_z(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2A_n \operatorname{sh}\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} x\right) \cos\left(\dfrac{2\pi n}{\lambda} z\right).}$

3) D'après le cours, le changement de référentiel n'affecte pas le champ magnétique :
Le champ magnétique $\vec{B}'$ a donc pour composantes $B_x(x, z)$ et $B_z(x, z)$.

Copyrighted material

Hidden page

Néanmoins, pour $n = n'$, on a : $\int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \sin^2\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right) dz = \int_{-\frac{\lambda}{2}}^{\frac{\lambda}{2}} \frac{1 - \cos\left(\frac{4\pi n}{\lambda} z\right)}{2} dz = \frac{\lambda}{2}$ et

$$\int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \left(\mathrm{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right)\right)^2 dx = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} \left(1 + \mathrm{ch}\left(\frac{4\pi n}{\lambda} x\right)\right) dx = \frac{\Delta}{2} + \frac{\lambda}{4\pi n} \mathrm{sh}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} \Delta\right).$$

On trouve alors : $\mathbf{F_{Lz} = -\sigma V l \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \left(\Delta + \frac{\lambda}{2\pi n} \mathrm{sh}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} \Delta\right)\right)}$.

On sait que : $\mathbf{P_f = \vec{F}_{Lz} \cdot \vec{V} = -\sigma V^2 l \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \left(\Delta + \frac{\lambda}{2\pi n} \mathrm{sh}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} \Delta\right)\right)}$.

6) On a $P_J = \iiint_D \vec{j} \cdot \vec{E}_m \, d\tau$.

Donc $P_J = \iiint_D 4V^2\sigma \left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n \mathrm{ch}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} x\right) \sin\left(\frac{2\pi n}{\lambda} z\right)\right)^2 dx dy dz$.

Par le même type de calculs effectués pour déterminer F_{Lz}, on obtient :

$$\mathbf{P_J = \sigma V^2 l \lambda \sum_{n=1}^{+\infty} A_n^2 \left(\Delta + \frac{\lambda}{2\pi n} \mathrm{sh}\left(\frac{2\pi n}{\lambda} \Delta\right)\right)}.$$

7) On a : $P_J = -P_f$. Ainsi toute la puissance mécanique est transformée en puissance thermique : la puissance des forces de freinage est dissipée sous forme d'effet Joule.

Exercices de niveau 3

Exercice 8

1) a) Le voltmètre est de grande impédance, on peut donc considérer le circuit ouvert et ainsi une intensité nulle entre A et C.

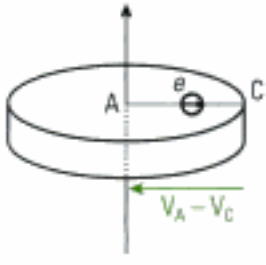
On met en œuvre la méthode n° 1.

On travaille en coordonnées cylindriques d'axe $z'z$ et de vecteur de base $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$.

Le potentiel au point A est le potentiel sur l'axe (au centre du disque).

Donc, par définition, $V_A - V_C = -e$ où $e = \int_A^C \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$ avec $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$,

$\vec{v}$ étant la vitesse d'un point du disque et $d\vec{l}$ l'élément de longueur orienté dans le sens A vers C.



On a : $\vec{v} = r\omega \vec{u_\theta}$.

On en déduit $\vec{E}_m = r\omega B \vec{u_r}$ soit $e = \int_A^C r\omega B dr = \frac{\omega B a^2}{2}$.

D'où : $\mathbf{V_A - V_C = -e = -\frac{\omega B a^2}{2}}$.

b) Le disque n'est parcouru par aucun courant puisqu'il est en circuit ouvert.

Les forces qui s'exercent sur le disque sont le poids et la réaction de l'axe qui compense le poids.

L'application du théorème du moment cinétique au disque donne alors : $J \frac{d\omega}{dt} = 0$, où J est le moment d'inertie par rapport à l'axe du disque.

On en conclut que la vitesse de rotation reste constante s'il n'y a pas de frottements : $\omega = \omega_0$.

2) a) On note C le point de contact électrique avec le disque D_1, E le point de contact électrique avec le disque D_2 et V_A représente le potentiel de l'axe.

Copyrighted material

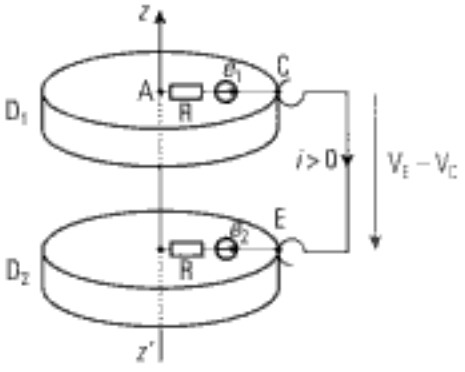
En reprenant le calcul de la question **1) a)**, on a $e_1 = \dfrac{\omega_0 B a^2}{2}$ pour le disque D_1 orienté de A vers C

et $e_2 = \dfrac{\omega(t) B a^2}{2}$ pour le disque D_2 orienté de A vers E.

On en déduit la force électromotrice e induite dans le circuit, en faisant attention de l'orientation de E vers C de celle-ci :

$$e = e_1 - e_2 = \frac{\omega_0 B a^2}{2} - \frac{\omega(t) B a^2}{2}.$$

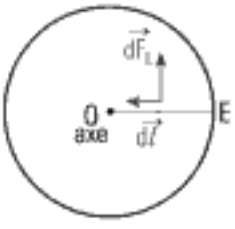
Donc $\boldsymbol{e = \dfrac{[\omega_0 - \omega(t)]Ba^2}{2}}$ si e est orienté de E vers C.



b) Les points C et E sont reliés par un fil de résistance négligeable. Donc $V_E - V_C = 0$.

Or, $V_E - V_C = 2Ri - e$.

Donc $\boldsymbol{i = \dfrac{[\omega_0 - \omega(t)]Ba^2}{4R}}$ si **i est orienté de C vers E dans le fil.**



c) Le poids est toujours compensé par la réaction de l'axe.

La disque D_2 est parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. De ce fait, les forces qui s'exercent sur le disque D_2 sont les forces de Laplace par rapport à l'axe.

Le moment de la force de Laplace par rapport à l'axe est la somme des moments des forces élémentaires de Laplace appliquées en chaque portion de circuit :

$$M_{z'z}(\vec{F}_L) = \left(\int_{axe}^{E} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L(M) \right) . \vec{u}_z,$$

où M est un point du rayon du disque situé à la distance r de l'axe et $d\vec{F}_L(M)$ est la force de Laplace exercée sur une élément de longueur dl placé au point M et orienté dans le sens du courant. Le courant $i(t)$ est orienté de E vers l'axe donc $d\vec{l} = -dl\,\vec{u}_r = -dr\,\vec{u}_r$.

$d\vec{F}_L(M) = i d\vec{l} \wedge \vec{B} = iBdr\,\vec{u}_\theta$ et $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$.

On obtient : $\boldsymbol{M_{z'z}(\vec{F}_L) = \int_0^a r i B dr = \dfrac{iBa^2}{2}}$.

Ceci donne : $\boldsymbol{M_{z'z}(\vec{F}_L) = \dfrac{[\omega_0 - \omega(t)]B^2a^4}{8R}}$.

On remarque que les phénomènes d'induction tendent à uniformiser les vitesses de rotation des deux disques.

Le moment des forces est positif si $\omega < \omega_0$, ce qui signifie que le disque D_2 sera entraîné en rotation par le disque D_1 dans le même sens. Ceci est conforme à la loi de Lenz puisqu'il faut accélérer le disque D_2 pour qu'il tourne à la vitesse de rotation ω_0.

Le moment des forces est négatif si $\omega > \omega_0$, ce qui signifie que le disque D_2 est freiné. Ceci est conforme à la loi de Lenz puisqu'il faut freiner le disque D_2 pour qu'il tourne à la vitesse de rotation ω_0.

La loi de Lenz indique bien que les disques ont tendance à tourner dans le même sens à la même vitesse.

d) On applique le théorème du moment cinétique au disque D_2 :

$$J \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{[\omega_0 - \omega(t)]B^2a^4}{8R}.$$

$\omega(t)$ est donc solution de l'équation différentielle : $\dfrac{8JR}{B^2a^4} \dfrac{d\omega(t)}{dt} + \omega(t) = \omega_0$.

Copyrighted material

On pose $\tau = \dfrac{8JR}{B^2a^4} = \dfrac{4mR}{B^2a^2}$.

La solution est la somme de la solution générale sans second membre $\omega_1(t) = Ae^{-\frac{t}{\tau}}$ et d'une solution particulière avec second membre $\omega_2(t) = \omega_0$.

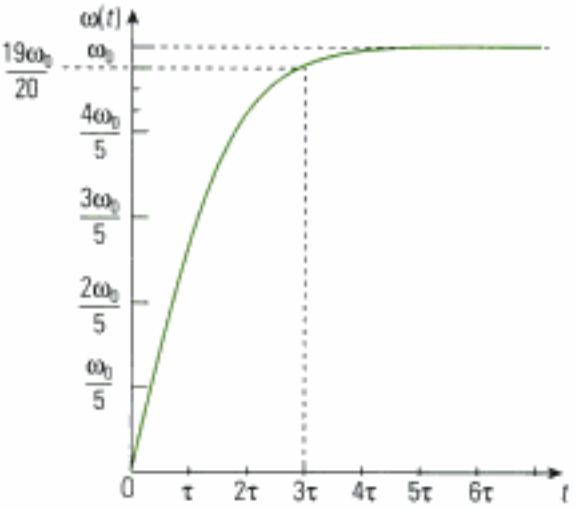
Le disque est au repos à l'instant $t = 0$

donc $A = -\omega_0$.

On obtient donc

$$\omega(t) = \omega_0(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}).$$

Le graphe donne :

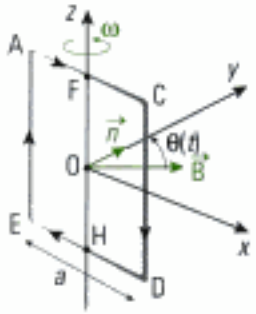


Exercice 9

1) a) On met en œuvre la méthode n° 1.

• Il faut d'abord déterminer le champ électromoteur $\vec{E}_m$ en tout point du cadre.

Le point M est un point quelconque du cadre que l'on a placé au hasard sur la figure suivante.



On travaille dans le repère donné en énoncé $Oxyz$ de vecteur de base $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Le champ magnétique a pour expression $\vec{B} = B(\sin\theta\,\vec{u}_x + \cos\theta\,\vec{u}_y)$ avec $\theta(t) = \omega t$ car, à l'instant initial, le champ magnétique $\vec{B}$ est parallèle à la normale du cadre : $\vec{u}_y$.

• Si M se trouve sur les branches AF ou EH à la distance r de l'axe, le champ électromoteur est $\vec{E}_{m1} = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v\vec{u}_y \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y) = vB\sin\omega t\,\vec{u}_z$ où $\vec{v} = -r\omega\vec{u}_y$ est la vitesse du point considéré.

• Si M se trouve sur les branches FC ou HD à la distance r de l'axe, le champ électromoteur est $\vec{E}_{m2} = \vec{v} \wedge \vec{B} = v\vec{u}_y \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y) = -vB\sin\omega t\,\vec{u}_z$ où $\vec{v} = r\omega\vec{u}_y$ est la vitesse du point considéré.

• Si M se trouve sur la branche CD à la distance $\dfrac{a}{2}$ de l'axe, le champ électromoteur est $\vec{E}_{m3} = \vec{v} \wedge \vec{B} = v\vec{u}_y \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y) = -vB\sin\omega t\,\vec{u}_z$ où $\vec{v} = \dfrac{a}{2}\omega\vec{u}_y$ est la vitesse du point considéré.

• Si M se trouve sur la branche EA à la distance $\dfrac{a}{2}$ de l'axe, le champ électromoteur est $\vec{E}_{m4} = \vec{v} \wedge \vec{B} = -v\vec{u}_y \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y) = vB\sin\omega t\,\vec{u}_z$ où $\vec{v} = -\dfrac{a}{2}\omega\vec{u}_y$ est la vitesse du point considéré.

Par définition, $e = \oint_{ACDE} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$. L'intégration se fait dans le sens ACDE du fait de l'orientation de la normale.

On a donc : $e = \int_A^F \vec{E}_{m1}\cdot d\vec{l} + \int_F^C \vec{E}_{m2}\cdot d\vec{l} + \int_C^D \vec{E}_{m3}\cdot d\vec{l} + \int_D^H \vec{E}_{m2}\cdot d\vec{l} + \int_H^E \vec{E}_{m1}\cdot d\vec{l} + \int_E^A \vec{E}_{m4}\cdot d\vec{l}$

Or,

➢ sur les portions AC et ED, l'élément de longueur $d\vec{l}$ est dirigé selon $\vec{u}_x$ et le champ électromoteur selon $\vec{u}_z$. La circulation de $\vec{E}_m$ sur AC et ED est donc nulle.

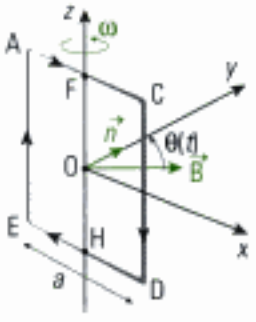
➢ sur la portion CD, on a $d\vec{l} = -dz\,\vec{u}_z$ soit, en tout point, $\vec{E}_{m3}\cdot d\vec{l} = \dfrac{a}{2}\omega B\sin\omega t\,dz$.

Copyrighted material

➢ sur les portions EA, on a $\overrightarrow{dl} = dz\,\vec{u}_z$ soit, en tout point, $\vec{E}_{m3}\cdot\overrightarrow{dl} = \frac{a}{2}\,\omega B \sin\omega t\,dz$.

D'où $e = \int_C^D \vec{E}_{m3}\cdot\overrightarrow{dl} + \int_E^A \vec{E}_{m4}\cdot\overrightarrow{dl} = \int_0^a \frac{a}{2}\,\omega B\sin\omega t\,dz + \int_0^a \frac{a}{2}\,\omega B\sin\omega t\,dz$.

On trouve alors : $\boldsymbol{e = Ba^2\omega\sin\omega t}$.



On retrouve le même résultat que dans l'exercice 1 avec N = 1 (une seule spire). On peut donc réaliser aussi le calcul par l'application de la loi de Faraday au cadre fermé.

b) Le cadre est en court-circuit donc : $0 = 4Ri - e$.

On en déduit : $\boldsymbol{i = \frac{Ba^2\omega}{4R}\sin\omega t}$ dans le sens indiqué sur la figure.

2) a) La puissance moyenne dissipée par effet Joule est $\langle P_J\rangle = 4RI_{eff}^2$ avec $I_{eff} = \frac{Ba^2\omega}{4\sqrt{2}R}$.

Donc : $\boldsymbol{\langle P_J\rangle = \frac{B^2a^4\omega^2}{8R^2}}$.

b) La résultante de forces de Laplace s'exerçant sur le cadre est la somme des forces élémentaires de Laplace sur chaque élément de cadre.

Si on considère deux points symétriques l'un de l'autre par rapport à l'axe, le courant est de sens opposé en ces deux points et le champ magnétique de même sens. Les forces de Laplace sont donc opposées.

Le cadre possède une symétrie par rapport à l'axe implique donc que la résultante de la force de Laplace exercée sur la cadre est nulle : $\boldsymbol{\vec{F}_L = \vec{0}}$.

c) Le moment de la force de Laplace au point O est la somme des moments des forces élémentaires de Laplace appliquées en chaque portion de circuit :

$$\vec{M}_O(\vec{F}_L) = \oint_{ACDE} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L(M),$$

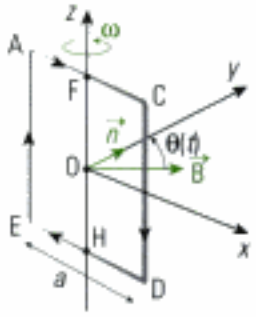
où M est un point du cadre situé à la distance r de l'axe et $d\vec{F}_L(M)$ est la force de Laplace exercée sur un élément de longueur dl placé au point M et orienté dans le sens du courant.

- Si M se trouve sur la branche AF à la distance r de l'axe, le moment élémentaire est $\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L(M) = -r\vec{u}_x \wedge [i dr\vec{u}_x \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y)] = iB\cos\omega t\,r dr\,\vec{u}_y$.
- Si M se trouve sur la branche FC à la distance r de l'axe, le moment élémentaire est $\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L(M) = r\vec{u}_x \wedge [i dr\vec{u}_x \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y)] = -iB\cos\omega t\,r dr\,\vec{u}_y$.
- Si M se trouve sur la branche HD à la distance r de l'axe, le moment élémentaire est $\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L(M) = r\vec{u}_x \wedge [-i dr\vec{u}_x \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y)] = iB\cos\omega t\,r dr\,\vec{u}_y$.
- Si M se trouve sur la branches HE à la distance r de l'axe, le moment élémentaire est $\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L(M) = -r\vec{u}_x \wedge [-i dr\vec{u}_x \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y)] = -iB\cos\omega t\,r dr\,\vec{u}_y$.
- Si M se trouve sur la branche CD à la distance $\frac{a}{2}$ de l'axe, le moment élémentaire est $\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L(M) = \frac{a}{2}\vec{u}_x \wedge [-i dz\vec{u}_z \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y)] = -iB\frac{a}{2}\sin\omega t\,dz\,\vec{u}_z$.
- Si M se trouve sur la branche EA à la distance $\frac{a}{2}$ de l'axe, le moment élémentaire est $\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L(M) = -\frac{a}{2}\vec{u}_x \wedge [i dz\vec{u}_z \wedge B(\sin\omega t\,\vec{u}_x + \cos\omega t\,\vec{u}_y)] = -iB\frac{a}{2}\sin\omega t\,dz\,\vec{u}_z$.

En fait, si M est le point courant du cadre, $\overrightarrow{OM}$ a une composante suivant $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_z$: $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{u}_x + \beta\vec{u}_z$. Néanmoins, comme $d\vec{F}_L$ est toujours porté par $\vec{u}_z$, on a simplifié le calcul en écrivant : $\overrightarrow{OM} \wedge d\vec{F}_L = \alpha\vec{u}_x \wedge d\vec{F}_L$.

Copyright material

D'où :



- $\int_A^F iB\cos\omega t\, r\,dr\,\vec{u}_y = \int_0^{\frac{a}{2}} iB\cos\omega t\, r\,dr\,\vec{u}_y = iB\,\frac{a^2}{8}\cos\omega t\,\vec{u}_y$
- $\int_F^C -iB\cos\omega t\, r\,dr\,\vec{u}_y = \int_0^{\frac{a}{2}} -iB\cos\omega t\, r\,dr\,\vec{u}_y = -iB\,\frac{a^2}{8}\cos\omega t\,\vec{u}_y$
- $\int_D^H iB\cos\omega t\, r\,dr\,\vec{u}_y = \int_0^{\frac{a}{2}} iB\cos\omega t\, r\,dr\,\vec{u}_y = iB\,\frac{a^2}{8}\cos\omega t\,\vec{u}_y$
- $\int_H^E -iB\cos\omega t\, r\,dr\,\vec{u}_y = \int_0^{\frac{a}{2}} -iB\cos\omega t\, r\,dr\,\vec{u}_y = -iB\,\frac{a^2}{8}\cos\omega t\,\vec{u}_y$
- $\int_C^D -iB\,\frac{a}{2}\sin\omega t\,dz\,\vec{u}_z = \int_0^a -iB\,\frac{a}{2}\sin\omega t\,dz\,\vec{u}_z = -iB\,\frac{a^2}{2}\sin\omega t\,\vec{u}_z$
- $\int_B^A -iB\,\frac{a}{2}\sin\omega t\,dz\,\vec{u}_z = \int_0^a -iB\,\frac{a}{2}\sin\omega t\,dz\,\vec{u}_z = -iB\,\frac{a^2}{2}\sin\omega t\,\vec{u}_z$

On obtient $\vec{M}_O(\vec{F}_L) = -iBa^2\sin\omega t\,\vec{u}_z$.

Ceci donne : $$\boxed{\vec{M}_O(\vec{F}_L) = -\frac{B^2a^4\omega}{4R}\sin^2\omega t\,\vec{u}_z.}$$

d) La puissance moyenne fournie au cadre est : $\langle P_L\rangle = \langle \vec{M}_O(\vec{F}_L)\cdot\vec{\omega}\rangle$.

La valeur moyenne est $\langle P_L\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T -\frac{B^2a^4\omega^2}{4R}\sin^2\omega t\,dt = -\frac{B^2a^4\omega^2}{4R}\langle\sin^2\omega t\rangle$.

Le calcul de $\langle P_L\rangle$ revient au calcul de $\langle\sin^2\omega t\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \sin^2\omega t\,dt$ où $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Or, $\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t+\varphi)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1-\cos(2\omega t+\varphi)}{2}\right)dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{4T\omega}\left[\sin(\omega t+\varphi)\right]_0^T = \frac{1}{2}$.

On peut appliquer directement les résultats $\langle\sin^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle\cos^2\omega t\rangle = \frac{1}{2}$, $\langle\sin n\omega t\rangle = 0$ et $\langle\cos n\omega t\rangle = 0\ \ \forall n\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

D'où : $$\boxed{\langle P_L\rangle = -\frac{B^2a^4\omega^2}{8R}}.$$

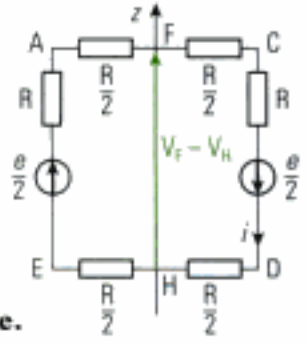
Cette puissance est négative. Ceci est en accord avec la loi de Lenz puisque la force de Laplace (effet de l'induction) s'oppose au mouvement du cadre (cause de l'induction).

Cette puissance a même valeur que la puissance dissipée par effet Joule. Ceci s'explique car l'induction réalise un couplage électromécanique tel que la puissance mécanique est fournie au cadre et transformée en puissance électrique. Le cadre la dissipe sous forme thermique (effet Joule).

e) Le moteur doit fournir une puissance qui compense les pertes (effet Joule).

On a donc : $$\boxed{\langle P\rangle = \frac{B^2a^4\omega^2}{8R}}.$$

Application numérique : $$\boxed{\langle P\rangle = 0{,}16\ \text{pW}}.$$



3) a) L'impédance du voltmètre est « grande » de manière à considérer que celui-ci ne perturbe pas le montage.

On a : $V_F - V_H = 2Ri - \frac{e}{2}$ si on suppose qu'il n'y a pas d'induction dans les fils du voltmètre. En appliquant la loi des mailles sur le circuit entier, on a : $0 = 4Ri - e$.

On trouve alors évidemment $\mathbf{V_F - V_H = 0}$.

La mesure du champ magnétique est impossible par cette méthode.

Copyrighted material

b) La nouvelle équation électrique du montage devient $0 = (4R + R')i - e$.

On en déduit : $$i' = \frac{Ba^2\omega}{4R + R'} \sin\omega t.$$

La mesure de la valeur efficace du courant permet de déterminer le champ magnétique si on connaît a et ω.

Dans le cas de l'énoncé, on obtient $I_{eff} = 71$ nA. Ce courant est difficile à mesurer. Il faudrait augmenter le nombre de spires pour améliorer le système.

Exercice 10

1) Le haut-parleur est un système à symétrie cylindrique. On utilise les coordonnées cylindriques d'axe Ox et de base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_x)$.

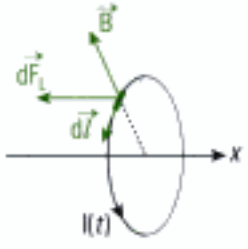
• Les forces qui s'exercent sur la membrane sont :

➢ Force de rappel : $\vec{F}_R = -kx\vec{u}_x$.

➢ Force de frottement fluide qui modélise les interactions avec l'air : $\vec{F}_f = -f\frac{dx}{dt}\vec{u}_x$.

➢ Force de Laplace exercée sur la bobine parcourue par un courant $I(t)$ et placée dans un champ magnétique radial $\vec{B} = B\vec{u}_r$:

$$\vec{F}_L = \int_{bobine} I(t)d\vec{l} \wedge \vec{B}.$$



⚠ Il faut ici supposer un sens de parcourt pour le courant. On le prend suivant $\vec{u}_\theta$, de sorte que la normale à chaque spire est bien $\vec{u}_r$.

La longueur de fil de la bobine est l. La force de Laplace est la somme des forces exercées sur chaque élément de longueur de la bobine $d\vec{l} = dl\vec{u}_\theta$.

D'où : $\vec{F}_L = \int_0^l I(t)Bdl\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_r = -I(t)Bl\vec{u}_x$.

➢ Le poids de la membrane qui est compensé par la réaction du baffle.

• On applique la deuxième loi de Newton à la membrane de masse m et de vitesse $\vec{v} = \frac{dx}{dt}\vec{u}_x$ que l'on projète sur l'axe Ox :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - f\frac{dx}{dt} - I(t)Bl. \quad (1)$$

2) La force électromotrice induite dans la bobine du fait de son mouvement est égale à la circulation du champ électromoteur de Lorentz sur la bobine.

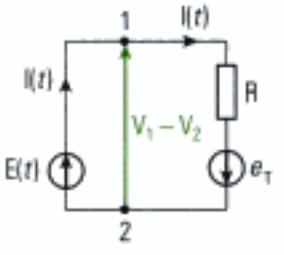
• Le champ électromoteur est défini par $\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B} = vB\vec{u}_x \wedge \vec{u}_r = vB\vec{u}_\theta$.

• La force électromotrice est $e = \int_0^l \vec{E}_m \cdot d\vec{l} = \int_0^l vBdl = vBl$.

Il faut aussi tenir compte de l'auto-induction qui est modélisé par la force électromotrice $e' = -L\frac{dI(t)}{dt}$.

La force électromotrice totale dans la bobine est donc : $e_T = vBl - L\frac{dI(t)}{dt}$.

La différence de potentiel aux bornes de la bobine est $V_1 - V_2 = RI(t) - e_T$ en convention récepteur. Cette différence de potentiel est égale à la tension à ses bornes $E(t)$ dans le même sens que $I(t)$ puisqu'il s'agit du générateur qui fournit ce courant que l'on considère donc en convention générateur.



On en déduit : $E(t) = RI(t) - vBl + L\frac{dI(t)}{dt}$ (2) où $v = \frac{dx}{dt}$.

Copyright Material

3) On est en régime sinusoïdal forcé, on travaille donc en complexe.

Soient $\underline{E}(t) = \underline{E}e^{j\omega t}$, $\underline{I}(t) = \underline{I}e^{j\omega t}$, et $\underline{X}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$.

Les équations **(1)** et **(2)** donnent :

$$-m\omega^2\underline{X} = -k\underline{X} - jf\omega\underline{X} - Bl\underline{I} \quad \text{et} \quad \underline{E} = R\underline{I} - jBl\omega\underline{X} + jL\omega\underline{I}.$$

On obtient la relation entre $\underline{E}$ et $\underline{I}$ par substitution dans les équations précédentes :

$$\boldsymbol{\underline{E} = R\underline{I} + \frac{jB^2l^2\omega}{k + jf\omega - m\omega^2}\underline{I} + jL\omega\underline{I}.}$$

L'impédance complexe est $\underline{Z} = \dfrac{\underline{E}}{\underline{I}}$.

D'où :

$$\boldsymbol{\underline{Z} = \underbrace{R + jL\omega}_{\substack{\text{impédance}\\ \text{classique}}} + \underbrace{\frac{jB^2l^2\omega}{k + jf\omega - m\omega^2}}_{\substack{\text{impédance due au}\\ \text{phénomène d'induction}}}.}$$

4) On a $\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{jB^2l^2\omega}{k + jf\omega - m\omega^2} = R + jL\omega + \dfrac{\frac{B^2l^2}{f}}{1 + \frac{k - m\omega^2}{jf\omega}} = R + jL\omega + \dfrac{b}{1 - ja(\omega)}$.

D'où : $\underline{Z} = R + jL\omega + \dfrac{b}{1 + [a(\omega)]^2} + j\dfrac{ba(\omega)}{1 + [a(\omega)]^2}$.

On en déduit : $\boldsymbol{R' = \dfrac{b}{1 + [a(\omega)]^2}}$ et $\boldsymbol{L' = \dfrac{ba(\omega)}{(1 + [a(\omega)]^2)\omega}}$.

• La dimension du produit $\dfrac{k}{\omega}$ est celle de où $kx\,\dfrac{1}{\omega x}$ est homogène à une force. $\dfrac{k}{\omega}$ s'exprime donc en $N{\cdot}s{\cdot}m^{-1}$ et f s'exprime en $N{\cdot}s{\cdot}m^{-1}$. Donc ***a*(ω) est sans dimension**.

• La force de Laplace est le produit du champ magnétique par une longueur et un courant. Donc le produit Bl s'exprime en $N{\cdot}A^{-1}$. De plus, la force électromotrice induite est le produit du champ magnétique par une longueur et une vitesse. Donc le produit Bl s'exprime en $V{\cdot}s{\cdot}m^{-1}$.

$\dfrac{B^2l^2}{f}$ s'exprime en $V{\cdot}A^{-1}$ et b est donc équivalent à une impédance. ***b* s'exprime alors en Ohm**.

Exercice 11

1) La bobine plate se déplace à l'extérieur du solénoïde où le champ magnétique $\vec{B}$ n'est pas uniforme. Les variations de ce champ magnétique en fonction de la position de la bobine explique les variations temporelles du champ $\vec{B}$ au niveau de la bobine plate en mouvement.

Du point de vue de la bobine plate, elle est placée dans un champ variable au cours du temps qui engendre un phénomène d'induction. La bobine étant court-circuitée, il y a apparition d'un courant induit que l'on représente par $i_2(t)$ sur la figure de l'énoncé.

2) a) On met en œuvre la méthode n° 2.

Le flux du champ magnétique à travers la surface de la bobine plate est $\Phi = N\iint_S \vec{B}{\cdot}d\vec{S}$ où $d\vec{S} = dS\,\vec{u}_z$ si on oriente la bobine dans le sens indiqué par le courant $i_2(t)$.

$$\Phi = NB(z)\pi r^2 = N\frac{\mu_0 n i_1(t)}{2}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)\pi r^2 = M(z)i_1(t).$$

On obtient alors : $\boldsymbol{M(z) = N\dfrac{\mu_0 n}{2}\left(1 - \dfrac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}}\right)\pi r^2}$.

Copyrighted material

b) Si on oriente la force électromotrice dans le sens du courant $i_2(t)$, on a $e = -\dfrac{d\Phi}{dt}$.

D'où : $$\boldsymbol{e = -M(z)\dfrac{di_1(t)}{dt}}.$$

c) La bobine est court-circuitée, on a donc : $0 = R_2 i^2(t) - e$.

On en conclut : $$\boldsymbol{i_2(t) = -\dfrac{M(z)}{R_2}\dfrac{di_1(t)}{dt}}.$$

On met en œuvre la méthode n° 3 pour vérifier la cohérence du résultat.
On étudie le sens de la force si $i_1(t)$ est positif et croissant ; $i_2(t)$ est négatif dans ce cas.
Si $i_1(t)$ est croissant, le champ magnétique est croissant. La bobine devrait alors avoir tendance, d'après la loi de Lenz, à s'opposer aux causes qui lui ont donné naissance : la bobine devrait créer un champ magnétique de sens opposé au champ $\vec{B}$ lui étant appliqué.
Le courant $i_2(t)$ est négatif et crée bien un champ magnétique de sens opposé, s'opposant ainsi à la croissance du champ inducteur.
La loi de Lenz est bien vérifiée.

3) La force de Laplace exercée sur la bobine plate est $\vec{F}_L = N\oint_{spire} i_2(t)d\vec{l} \wedge \vec{B}$.

D'où : $\vec{F}_L = N\int_0^{2\pi} i_2(t) r d\theta\, \vec{u}_\theta \wedge \left(-\dfrac{r}{2}\dfrac{dB(z)}{dz}\vec{u}_r + B(z)\vec{u}_z\right)$,

soit $\vec{F}_L = N\left(i_2(t)\dfrac{r^2}{2}\dfrac{dB(z)}{dz}\int_0^{2\pi} d\theta\,\vec{u}_z + i_2(t) r B(z)\int_0^{2\pi} d\theta\,\vec{u}_r\right) = N i_2(t)\pi r^2 \dfrac{dB(z)}{dz}\vec{u}_z$.

Or, $\Phi = NB(z)\pi r^2 = M(z) i_1(t)$.

D'où : $$\boldsymbol{\vec{F}_L = i_1(t) i_2(t)\dfrac{dM(z)}{dz}\vec{u}_z}.$$

4) La bobine plate est sensible à la moyenne temporelle de la force de Laplace :

$\langle\vec{F}_L\rangle = \langle i_1(t) i_2(t)\rangle \dfrac{dM(z)}{dz}\vec{u}_z$.

Or, $i_1(t) = I_0 \cos\omega t$ et $i_2(t) = -\dfrac{M(z)}{R_2}\dfrac{di_1(t)}{dt} = \dfrac{M(z)}{R_2} I_0 \omega \sin\omega t$.

D'où : $\langle i_1(t) i_2(t)\rangle = 0$ et $\langle\vec{F}_L\rangle = \vec{0}$.

La spire doit tomber sous l'effet de son poids.

5) Le modèle n'est pas adapté. Néanmoins, on peut remarquer que l'on n'a pas tenu compte de l'inductance propre de la bobine plate.

6) a) La force électromotrice d'induction est composée de deux termes :

• Un terme provenant de l'induction propre $e_1 = -L_1\dfrac{di_1(t)}{dt}$

• Un terme provenant de l'induction mutuelle $e_2 = -M(z)\dfrac{di_2(t)}{dt}$.

L'équation électrique du solénoïde est $V(t) = R_1 i_1(t) - e_1 - e_2$.

On a donc : $$\boldsymbol{V(t) = R_1 i_1(t) + L_1\dfrac{di_1(t)}{dt} + M(z)\dfrac{di_2(t)}{dt}}.$$

b) La force électromotrice d'induction est composée de deux termes :

• Un terme provenant de l'induction propre $e_1' = -L_2\dfrac{di_2(t)}{dt}$ et

• Un terme provenant de l'induction mutuelle $e_2' = -M(z)\dfrac{di_1(t)}{dt}$.

Copyright material

L'équation électrique de la bobine plate est $0 = R_2 i_2(t) - e_1' - e_2'$ (la bobine est en court-circuit).

D'où : $$\mathbf{0 = R_2 i_2(t) + L_2 \frac{di_2(t)}{dt} + M(z) \frac{di_1(t)}{dt}}.$$

c) Le solénoïde est alimenté par un signal sinusoïdal. On peut donc travailler en notation complexe.

Soient $\underline{V}(t) = \underline{V}e^{j\omega t}$, $\underline{i}_1(t) = \underline{i}_1 e^{j\omega t}$, $\underline{i}_2(t) = \underline{i}_2 e^{j\omega t}$.

On obtient alors :

$$\underline{V} = (R_1 + jL_1\omega)\underline{i}_1 + jM(z)\omega\underline{i}_2 \quad \text{et} \quad 0 = (R_2 + jL_2\omega)\underline{i}_2 + jM(z)\omega\underline{i}_1.$$

On trouve :

$$\underline{i}_1 = \frac{R_2 + jL_2\omega}{(R_1 + jL_1\omega)(R_2 + jL_2\omega) + [M(z)\omega]^2}\underline{V} \quad \text{et} \quad \underline{i}_1 = \frac{jM(z)\omega}{(R_1 + jL_1\omega)(R_2 + jL_2\omega) + [M(z)\omega]^2}\underline{V}.$$

d) D'après la question 4, on a : $\langle \vec{F}_L \rangle = \langle i_1(t) i_2(t) \rangle \frac{dM(z)}{dz} \vec{u}_z$.

Avec les données de l'énoncé, on obtient :

$$i_1(t)i_2(t) = 10{,}4\cos(\omega t - 1{,}39)\cos(\omega t - 3{,}07) = 5{,}2\,[\cos(2\omega t - 4{,}46) + \cos(1{,}68)].$$

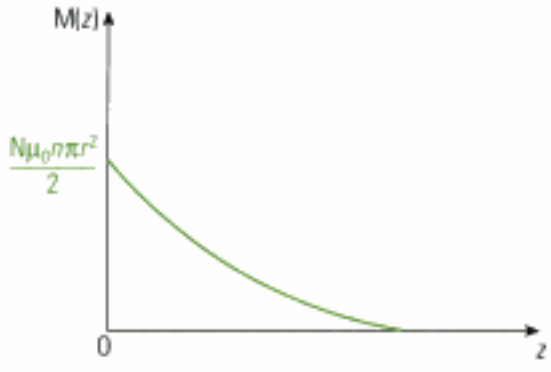
On se rappelle de la formule trigonométrique : $\cos p \cos q = \frac{1}{2}[\cos(p+q) + \cos(p-q)]$.

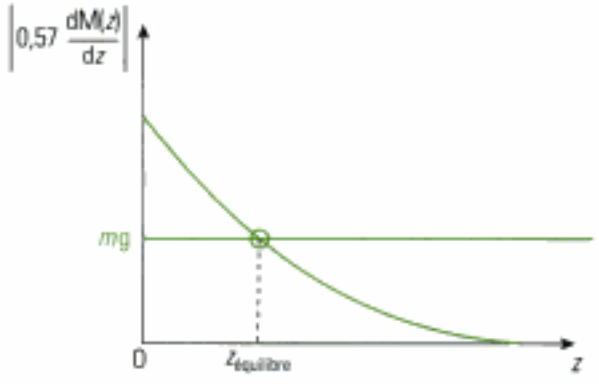
D'où $i_1(t)i_2(t) = -0{,}57 + 5{,}2\cos(2\omega t - 4{,}46)$ et $\langle i_1(t)i_2(t) \rangle = -0{,}57$.

On en conclut $\langle \vec{F}_L \rangle = -0{,}57 \frac{dM(z)}{dz} \vec{u}_z$.

Or, $\frac{dM(z)}{dz} < 0$. **On obtient donc une force moyenne qui a tendance à propulser la bobine vers le haut.**

L'équilibre sera obtenu lorsque cette force compense le poids.





Copyrighted material

CHAPITRE

5 Quelques problèmes

Introduction

Ce chapitre est composé de trois problèmes qui abordent l'ensemble des notions étudiées dans cet ouvrage.

Plan du chapitre 5

Problème 1. ***Champ électromagnétique dans un condensateur plan cylindrique*** . . . 184
Solution . . . 187

Problème 2. ***Chute d'un aimant dans un tuyau métallique*** . . . 193
Solution . . . 195

Problème 3. ***Moteur linéaire*** . . . 198
Solution . . . 200

Copyrighted material

Problèmes

Problème 1 : *champ électromagnétique dans un condensateur plan cylindrique*

Un condensateur plan est constitué par des armatures métalliques circulaires de rayon R et de même axe $\Delta = z'z$, séparées d'une hauteur h (fig. 1). Ce condensateur est soumis à une tension alternative donnée, de fréquence $f = \frac{\omega}{2\pi}$, qui produit à l'instant t dans l'espace vide entre les armatures un champ $\vec{E}_0 = \vec{\varepsilon_0}\cos\omega t$ uniforme, sinusoïdal dans le temps et axial (c'est-à-dire parallèle à l'axe Δ), qu'on écrit en notation complexe : $\underline{\vec{E}}_0 = \underline{e}_0 e^{j\omega t}\,\vec{u}_z$ où $e_0 > 0$ est l'amplitude du champ $\vec{E}_0$.

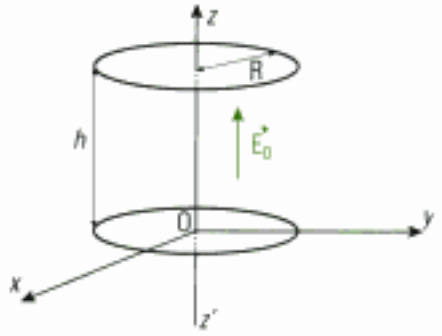


Fig. 1

Le champ électrique $\vec{E}_0$ crée un champ magnétique $\vec{B}_1$, lequel engendre un champ électrique $\vec{E}_2$, qui crée à son tour un champ magnétique $\vec{B}_3$, qui engendre $\vec{E}_4$, etc.

Dans tout le problème, on négligera les effets de bord. On travaille en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z).

1) Calcul des champs $\vec{B}_1$ et $\vec{E}_2$

a) Les variations dans le temps du champ électrique $\vec{E}_0$ créent un champ magnétique $\vec{B}_1$.

On veut calculer $\vec{B}_1$.

a1) En un point M entre les plaques, donner l'équation de Maxwell que satisfait $\vec{B}_1(M, t)$ en fonction de ω, c (la vitesse de la lumière dans le vide) et $\vec{E}_0$.

a2) On se place en coordonnées cylindriques. Montrer que $\vec{B}_1(M, t)$ est orthoradial (c'est-à-dire dirigé selon $\vec{u}_\theta$). Quel est son sens au temps t ?

a3) Soit le cercle C_1 parallèle au plan xOy, centré sur Δ et passant par M. Calculer la circulation $\oint_{C_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}$ de $\vec{B}_1$ sur le contour C_1 qu'on orientera comme $\vec{B}_1$.

En déduire l'expression de $\vec{B}_1(M, t)$ en fonction de c, $X = \frac{\omega\rho}{2c}$ et $\underline{E}_0$. Quelle est la dimension de X ?

b) Les variations dans le temps du champ magnétique $\vec{B}_1$ créent un champ électrique $\vec{E}_2$. On veut calculer $\vec{E}_2$.

b1) Quelle relation lie $\vec{E}_2$ à $\vec{B}_1$? En déduire l'équation de Maxwell satisfaite par $\vec{E}_2(M, t)$ en fonction de c, X, ω et $\underline{E}_0$.

b2) Sans faire de calculs, montrer que l'on peut supposer $\vec{E}_2$ axial.

b3) Soit le contour orienté rectangulaire C_2 (fig. 2) dans un plan méridien :

Calculer la circulation $\oint_{C_2} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l}$ de $\vec{E}_2$ sur C_2.

En déduire l'expression de $\vec{E}_2(M, t)$ en fonction de X et $\vec{E}_0$ en prenant $\vec{E}_2(\rho = 0) = \vec{0}$. Justifier ce choix.

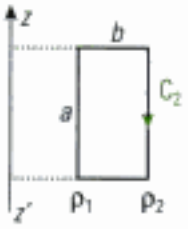


Fig. 2

2) Comportement à basse fréquence

À basse fréquence ($X \ll 1$), on néglige les termes en X de degré supérieur à 2.

a) Exprimer, dans ces conditions, le champ magnétique total $\vec{B}_{BF}(M, t)$ et le champ électrique total $\vec{E}_{BF}(M, t)$ qui règnent en M à l'instant t à l'intérieur du condensateur, en fonction de c, X et $\underline{E}_0$.

b) *Étude énergétique*

b1) Calculer la densité volumique instantanée $\varepsilon_e(t)$ d'énergie électrique et la densité volumique instantanée $\varepsilon_m(t)$ d'énergie magnétique dans le condensateur en fonction de ε_0 (la permittivité du vide), X, ωt et e_0.

b2) On note $\langle \varepsilon_{e,m}(t) \rangle_t$ les moyennes temporelles correspondantes. Exprimer, en fonction de X, le rapport $\frac{\langle \varepsilon_m \rangle_t}{\langle \varepsilon_e \rangle_t}$. Que concluez-vous ?

c) *Puissance rayonnée*

c1) Soit $\vec{P}$ le vecteur de Poynting associé à ce champ électromagnétique. Calculer $\vec{P}$ à l'ordre le plus bas en X, en fonction de ε_0, c, X, e_0 et ωt.

c2) En déduire que les échanges par rayonnement se limitent à la surface latérale du condensateur. Calculer la puissance rayonnée instantanée P(t) et en déduire $\langle P(t) \rangle_t$. Comment interprétez-vous ce résultat ?

Copyrighted material

3) Comportement à haute fréquence

À haute fréquence, on ne peut plus négliger les termes en X de degré supérieur à 2. On va donc calculer $\vec{B}_3$ dont $\vec{E}_2$ est la source, $\vec{E}_4$ dont $\vec{B}_3$ est la source, etc.

a) Donner l'orientation de $\vec{B}_3$. Quelle est l'équation satisfaite par $\vec{B}_3$? Calculer $\oint_{C_1} \vec{B}_3 \cdot d\vec{l}$ et en déduire l'expression de $\vec{B}_3(M, t)$ en fonction de c, X et E_0.

b) Calculer $\vec{E}_4(M, t)$.

c) Expression des champs $\vec{E}_{2n}$ et $\vec{B}_{2n+1}$.

c1) On veut calculer par récurrence l'expression de $\vec{E}_{2n}$. On suppose que : $\vec{E}_{2n}(M, t) = \frac{1}{(n!)^2} (iX)^{2n} \vec{E}_0(t)$. En déduire $\vec{B}_{2n+1}(M, t)$.

c2) Calculer alors $\vec{E}_{2n+2}(M, t)$. Que concluez-vous ?

d) *Étude du champ électrique*

d1) Montrer que le champ électrique total $\vec{E}(M, t)$ qui règne à l'intérieur du condensateur s'exprime simplement en fonction de $\vec{E}_0(M, t)$ et de la fonction de Bessel $J_0(x)$ (donnée en annexe), à condition d'attribuer à x une expression littérale qu'on explicitera.

d2) Décrire la configuration du champ $\vec{E}(M, t)$ et examiner ses variations en fonction de ω. Montrer qu'à la périphérie du condensateur, certaines valeurs de ω annulent le champ électrique.

e) *Réalisation d'une cavité*

On ferme le condensateur au niveau de sa surface latérale ρ = R par une feuille d'aluminium assimilé à un conducteur parfait. On cherche les fréquences propres de la cavité ainsi constituée, c'est-à-dire les fréquences particulières permettant l'existence d'une onde décrite par $\vec{E} = \sum_n \vec{E}_{2n}$ avec les notations du paragraphe précédent.

e1) Quelles sont les conditions aux limites imposées aux champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ par la présence de la feuille d'aluminium ?

e2) Quelles sont les pulsations possibles pour le champ électromagnétique dans cette cavité cylindrique ?

e3) On excite la cavité à l'aide d'un générateur électrique délivrant une tension sinusoïdale de fréquence f aux bornes du condensateur. On constate expérimentalement que l'amplitude du champ dans la cavité prend des valeurs très importantes pour certaines fréquences f_i. Comment appelle-t-on ce phénomène ?

e4) Calculer la fréquence f_1 la plus basse du champ $\vec{E}_0$ dans la cavité pour $R = 4 \cdot 10^{-2}$ m. On donne $c = 3 \cdot 10^8$ m·s^{-1}.

4) Calcul direct du champ électrique total $\vec{E}$

Au lieu de calculer le champ total sous forme d'une série, on souhaite calculer directement le champ électrique $\vec{E}$ qui règne entre les armatures.

a) Obtenir l'équation générale de propagation qui relie les dérivées partielles du champ électrique.

b) On cherche à cette équation une solution axiale, ayant la symétrie du cylindre (invariance par rotation et par translation selon l'axe de révolution), qu'on écrit en notation complexe :

$$\vec{E}(M, t) = E(\rho)\exp(i\omega t)\vec{u}_z.$$

Donner l'équation différentielle du second ordre satisfaite par la fonction scalaire E(ρ) pour une fréquence donnée.

On rappelle que le laplacien d'une fonction exprimée en coordonnées cylindriques de la forme :

$$\vec{U}(M, t) = U(\rho, t)\vec{u}_z$$

vaut :

$$\Delta\vec{U}(M, t) = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} \left(\rho \frac{\partial U(\rho, t)}{\partial\rho} \right) \vec{u}_z.$$

c) Montrer, par un changement de variable judicieux, que cette équation différentielle peut s'écrire :

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} + 1 \right) E(x) = 0.$$

d) Montrer qu'on obtient la même solution que précédemment.

5) Introduction d'un diélectrique

Au lieu du vide, le condensateur précédent contient un diélectrique parfait, homogène, non chargé, de permittivité ε et de perméabilité $\mu = \mu_0$ (celle du vide).

a) Quelles sont, sans faire de calculs, les modifications à apporter aux notations précédentes pour décrire ce cas ?

En déduire l'expression du champ électrique total dans le diélectrique.

b) L'introduction d'un diélectrique a-t-elle de l'influence :

• sur l'amplitude du champ électrique en un point donné ?

• sur la valeur de la fréquence de résonance ?

Annexe : les fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel $B_\nu(z)$ sont des solutions de l'équation différentielle :

$$\frac{d^2B_\nu(z)}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{B_\nu(z)}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) B_\nu(z) = 0$$

$$\forall \nu \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{C}.$$

Copyrighted material

Les fonctions de Bessel de première espèce $J_\nu(z)$ sont définies par la série :

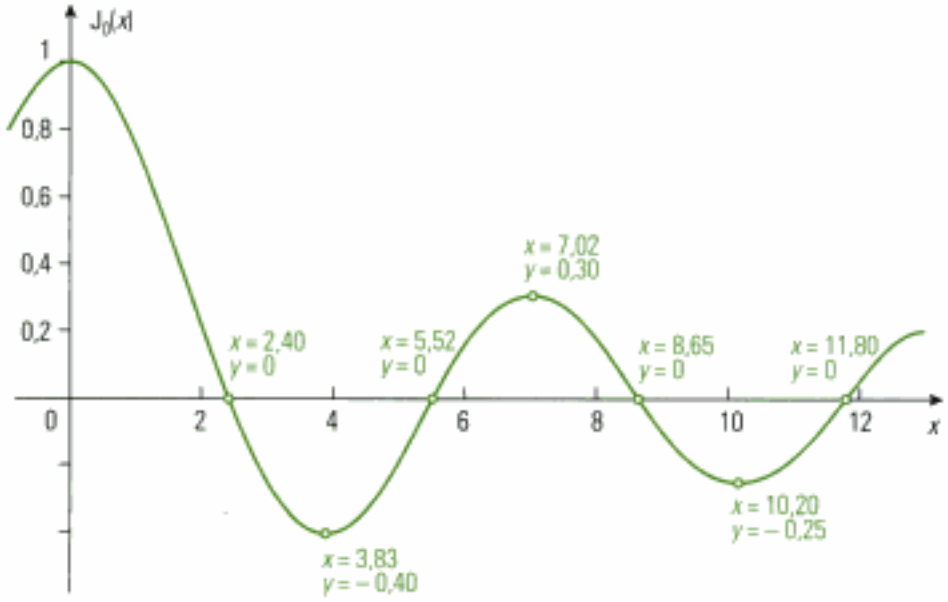
$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k},$$

pour z tel que $|\arg z| < \pi$, où Γ est la fonction qui généralise la fonction factorielle.

Dans le cas particulier $\nu = 0$, nous avons :

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Pour x réel, le graphe de la fonction $J_0(x)$ est, pour $x > 0$, le suivant :



Tiré du concours ENSAM - ESTP - ENSAIS Filière PSI 1998

Copyrighted material

Solution du problème 1

1) a) a1) L'équation de Maxwell permettant de déterminer le champ magnétique engendré par une variation temporelle du champ électrique est l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}}_1(M, t) = \mu_0 \vec{j}(M, t) + \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \underline{\vec{E}}_0(M, t)}{\partial t}.$$

Or, $\mu_0\varepsilon_0 = \dfrac{1}{c^2}$ et en un point M entre les plaques, il n'y a pas de courant, donc :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}}_1(M, t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial \underline{\vec{E}}_0(M, t)}{\partial t} = i\frac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}_0(M, t).$$

a2) Le champ électrique possède la symétrie cylindrique. Donc le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie du système. Le champ magnétique est normal à ce plan et donc orthoradial.

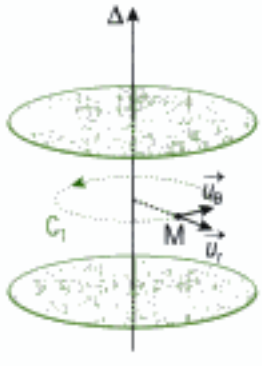
Entre les plaques du condensateur, le champ électrique est invariant par rotation d'angle θ. Donc le champ magnétique est indépendant de θ.

$$\vec{B}_1(M, t) = B_1(\rho, z, t)\vec{u}_\theta.$$

À l'instant t, le rotationnel du champ magnétique est :

$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}}_1(M, t) = i\dfrac{\omega}{c^2}e_0 e^{j\omega t}\vec{u}_z$, soit $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}_1(M, t) = -\dfrac{\omega}{c^2}e_0 \sin\omega t\,\vec{u}_z$.

• Si $\sin\omega t \geq 0$, soit si $t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[kT\,;\,(k+\frac{1}{2})T\right]$ avec $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}_1(M, t)$ est dirigé selon $-\vec{u}_z$ et alors $\vec{B}_1(M, t)$ est dirigé selon $-\vec{u}_\theta$.



En effet, si on appelle C_1 le cercle parallèle au plan xOy, centré sur Δ et de rayon ρ et S_1 le disque associé, alors la formule de Stokes fournit :

$$0 > \iint_{S_1}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}_1\cdot d\vec{S}\vec{u}_z = \iint_{S_1}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}_1\cdot d\vec{S} = \oint_{C_1}\vec{B}_1\cdot d\vec{l} = \oint_{C_1}\vec{B}_1\cdot\rho d\theta\,\vec{u}_\theta = 2\pi\rho B_1(\rho, z, t).$$

• Si $\sin\omega t < 0$, soit si $t \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left[(k+\frac{1}{2})T\,;\,kT\right]$, $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{B}_1(M, t)$ est dirigé selon $\vec{u}_z$ et alors $\vec{B}_1(M, t)$ est dirigé selon $\vec{u}_\theta$.

a3) On considère le cercle C_1 représenté sur le schéma précédent. On prend $d\vec{l} = \rho d\theta\,\vec{u}_\theta$ où ρ est le rayon de C_1. On obtient alors :

$$\oint_{C_1}\underline{\vec{B}}_1\cdot d\vec{l} = 2\pi\rho\underline{B}_1(\rho, z, t).$$

On utilise la formule de Stokes : $\oint_{C_1}\underline{\vec{B}}_1\cdot d\vec{l} = \iint_{S_1}\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{B}}_1\cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} i\dfrac{\omega}{c^2}\underline{\vec{E}}_0\cdot d\vec{S}$. La surface S_1 est bien orientée selon $\vec{u}_z$ puisque $d\vec{l} = \rho d\theta\,\vec{u}_\theta$.

On obtient $2\pi\rho\underline{B}_1(\rho, z, t) = i\dfrac{\omega}{c^2}\underline{E}_0\pi\rho^2$, soit

$$\underline{B}_1(\rho, z, t) = i\frac{\omega\rho}{2c^2}\underline{E}_0 = i\frac{X}{c}\underline{E}_0 \qquad \text{qui est indépendant de } z.$$

ωρ s'exprime en $m\cdot s^{-1}$ comme c donc **X est sans dimension**.

b) b1) L'équation de Maxwell permettant de déterminer le champ électrique engendré par une variation temporelle du champ magnétique est l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\underline{\vec{E}}_2(M, t) = -\frac{\partial \underline{\vec{B}}_1(M, t)}{\partial t} = \frac{X\omega}{c}\underline{E}_0\,\vec{u}_\theta.$$

Copyright material

b2) Le champ $\vec{\underline{E}}_2(M, t)$ possède les mêmes invariances que le champ $\vec{\underline{B}}_1(M, t)$ dont il découle et ne dépend donc que de la variable ρ.

D'où : $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{E}}_2(M, t) = -\dfrac{\partial \underline{E}_{2z}}{\partial \rho}\vec{u}_\theta + \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho \underline{E}_{2\theta})}{\partial \rho}\vec{u}_z = \dfrac{X\omega}{c}\underline{E}_0\vec{u}_\theta$.

Le champ électrique possède donc une composante suivant $\vec{u}_z$.

La composante selon $\vec{u}_\theta$ est telle que $\dfrac{\partial(\rho \underline{E}_{2\theta})}{\partial \rho} = 0$ soit $E_{2\theta} = \dfrac{K}{\rho}$ où K est une constante.

Physiquement, il est impossible que le champ électrique diverge sur l'axe, il n'a donc pas de composante suivant $\vec{u}_\theta$.

De plus, $\text{div}\vec{\underline{E}}_2 = 0 = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial(\rho \underline{E}_{2\rho})}{\partial \rho}\vec{u}_\rho$. Par le même raisonnement, on montre que la composante du champ électrique selon $\vec{u}_\theta$ est nulle.

Donc : $$\vec{\underline{E}}_2(\mathbf{M}, t) = \underline{E}_2(\rho, t)\vec{u}_z.$$

b3) La circulation du champ électrique $\vec{\underline{E}}_2$ est non nulle uniquement suivant les portions du contour parallèles à l'axe : $\vec{dl} = dl\vec{u}_z$ pour $\rho = \rho_1$ et pour $\rho = \rho_2$. On obtient alors :

$$\oint_{C_2}\vec{\underline{E}}_2\cdot\vec{dl} = a[\underline{E}_2(\rho_1, t) - \underline{E}_2(\rho_2, t)].$$

On utilise la formule de Stokes : $\oint_{C_2}\vec{\underline{E}}_2\cdot\vec{dl} = \iint_{S_2}\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{\underline{E}}_2\cdot\vec{dS} = -\iint_{S_2}\dfrac{\partial\vec{\underline{B}}_1}{\partial t}\cdot\vec{dS}$ où S_2 est la surface plane du contour C_2. On oriente cette surface selon $\vec{u}_\theta$ du fait de l'orientation du contour.

On obtient alors :

$$a[\underline{E}_2(\rho_1, t) - \underline{E}_2(\rho_2, t)] = \int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{\omega^2}{2c^2}\underline{E}_0\rho d\rho\int_0^a dz = \frac{\omega^2 a}{4c^2}\underline{E}_0(\rho_2^2 - \rho_1^2).$$

En prenant $\rho_1 = 0$, on a donc : $$\underline{E}_2(\rho, t) = -X^2\underline{E}_0.$$

On s'intéresse au champ engendré par une variation temporelle, il est donc logique de ne pas y introduire de grandeur constante, d'où le choix $\underline{E}_2(\rho = 0) = 0$.

2) a) Le champ magnétique engendré par $\vec{\underline{E}}_2(M, t)$ peut être négligé. On néglige donc les champs magnétique et électrique qui en découlent.

D'où : $$\vec{\underline{B}}_{BF}(\mathbf{M}, t) = \vec{\underline{B}}_1(\mathbf{M}, t) = i\frac{X}{c}\underline{E}_0\vec{u}_\theta$$

et $$\vec{\underline{E}}_{BF}(\mathbf{M}, t) = \vec{\underline{E}}_0(\mathbf{M}, t) + \vec{\underline{E}}_2(\mathbf{M}, t) = (1 - X^2)\underline{E}_0\vec{u}_z.$$

b) b1) Pour déterminer les énergies, il faut prendre les expressions temporelles des champs :

$$\vec{B}_{BF}(M, t) = -\frac{X}{c}e_0\sin\omega t\,\vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{E}_{BF}(M, t) = (1 - X^2)e_0\cos\omega t\,\vec{u}_z.$$

D'où : $$\varepsilon_e(t) = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{BF}^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}(1 - X^2)^2 e_0^2\cos^2\omega t$$

et : $$\varepsilon_m(t) = \frac{1}{2\mu_0}B_{BF}^2 = \frac{1}{2\mu_0 c^2}X^2 e_0^2\sin^2\omega t = \frac{\varepsilon_0}{2}X^2 e_0^2\sin^2\omega t.$$

b2) La valeur moyenne est définie par $\langle\varepsilon_e(t)\rangle_t = \dfrac{1}{T}\int_0^T\varepsilon_e(t)dt$ où $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

On obtient $\langle\varepsilon_e(t)\rangle_t = \dfrac{1}{T}\int_0^T\dfrac{\varepsilon_0}{2}(1 - X^2)^2 e_0^2\cos^2\omega t\,dt$ et $\langle\varepsilon_m(t)\rangle_t = \dfrac{1}{T}\int_0^T\dfrac{\varepsilon_0}{2}X^2 e_0^2\sin^2\omega t\,dt$.

Copyrighted material

Hidden page

Hidden page

Hidden page

5) a) L'introduction d'un diélectrique modifie la permittivité qui devient égale à ε au lieu de ε_0. Il suffit donc de remplacer ε_0 par ε dans les résultats obtenus.
Cela modifie la valeur de c qui devient égale à $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$ où $\varepsilon_r = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$.

Donc : $$\vec{\mathbf{E}}(\mathbf{M}, t) = \mathbf{J}_0\left(\frac{\omega\rho\sqrt{\varepsilon_r}}{\mathbf{c}}\right) \boldsymbol{e}_0 \, \mathbf{e}^{j\omega t} \, \vec{\boldsymbol{u}}_z.$$

b) L'introduction du diélectrique a une influence sur la valeur de la fonction de Bessel et donc sur l'amplitude du champ électrique.
Il a aussi une influence sur la fréquence de résonance qui est proportionnelle à $\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}}$.

Copyrighted material

Problème 2 : *chute d'un aimant dans un tuyau métallique*

Ce problème étudie des mouvements de chute dans le champ de pesanteur contrariés par l'existence d'une force de type frottement fluide.

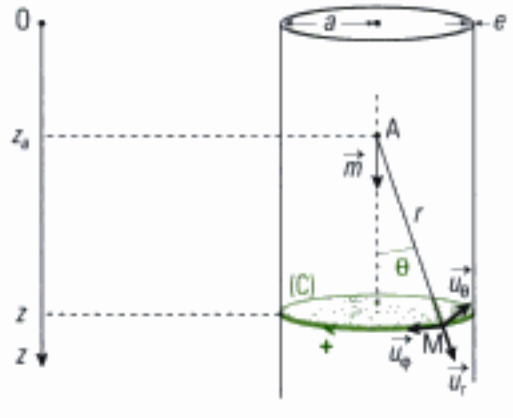
Plus précisément ce problème, où cette force est d'origine magnétique, envisage la chute d'un petit aimant dans un tube métallique.

Le repère terrestre est pris galiléen et le module de l'accélération de la pesanteur est $g = 9{,}81\ m{\cdot}s^{-2}$.

L'expérience montre que le temps de chute d'un petit aimant est beaucoup plus important dans un tuyau métallique que dans un tube de verre de même géométrie. Cette partie se propose de comprendre l'origine de ce phénomène et de le quantifier.

Un petit aimant A est lâché sans vitesse initiale du point O ($z = 0$), son moment magnétique $\vec{m} = m\vec{u}_z$ est au cours du mouvement toujours vertical et dirigé vers le bas. Son abscisse au cours de la chute est notée $z_a(t)$, l'axe Oz étant orienté suivant la verticale descendante. Cette chute s'effectue à l'intérieur d'un tuyau métallique creux, d'épaisseur e faible devant le rayon moyen a. La conductivité électrique du métal est σ. Les frottements de l'air sont négligés.

L'extrémité supérieure du tuyau est placée en $z = 0$ et sa longueur est L.



1) Courant induit dans un circuit élémentaire

Dans un premier temps il est commode de raisonner sur un circuit (C) de cote z constitué par le tronçon de tuyau de hauteur dz. Un point M de cette boucle est repéré par ses coordonnées sphériques d'origine l'aimant A et l'orientation positive du circuit est choisie suivant $+\vec{u}_\varphi$.

1) a) Expliquer qualitativement l'origine d'un courant di induit dans le circuit (C) ; prévoir son sens par la loi de Lenz et le représenter sur un dessin. Interpréter alors l'existence d'une force de freinage s'exerçant sur l'aimant.

b) Le potentiel vecteur $\vec{A}$ créé en un point M du circuit (C) par le dipôle magnétique est donné par l'expression suivante où $r = AM$:

$$\vec{A}(M) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \wedge \vec{u}_r}{r^2}.$$

Représenter le vecteur $\vec{A}(M)$ et donner ses coordonnées dans la base sphérique en fonction de m, a, z et z_a.

c) Pour quelle raison ce potentiel est-il fonction du temps ?

En déduire l'expression du champ électromoteur $\vec{E}_m$ en notant $v = \frac{dz_a}{dt} > 0$ la vitesse de chute de l'aimant :

$$\vec{E}_m(M) = -\frac{3\mu_0}{4\pi}\frac{ma(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^5}}\vec{u}_\varphi.$$

Dans la suite ce champ est supposé uniforme sur l'épaisseur e du métal (car $e \ll a$) ainsi que sur sa hauteur dz.

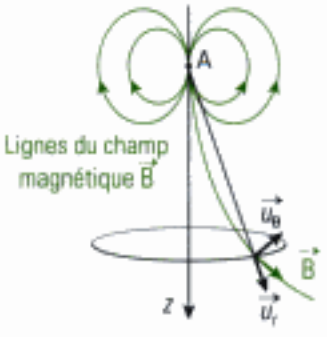
d) Déterminer le courant di induit par ce champ électromoteur dans le circuit (C) par la loi d'Ohm locale et le flux du vecteur densité de courant $\vec{j}$ à travers une surface adéquate.

Retrouver ce résultat à partir du calcul de la force électromotrice induite e_i, sachant que la résistance du circuit (C) est $dR = \frac{2\pi a}{\sigma e dz}$. On commentera la limite de cette résistance lorsque dz tend vers zéro. Le signe de di est-il conforme à la prévision faite à la question **a)** ?

2) Force exercée par le tuyau sur l'aimant

Soit $\vec{F}$ la force exercée par le tuyau sur l'aimant et F_Z sa projection sur l'axe Oz. Il est plus simple d'évaluer son opposée $F'_Z = -F_Z$, c'est-à-dire la force exercée par l'aimant sur le tuyau.

a) On donne les expressions des composantes B_r et B_θ du champ magnétique (en coordonnées sphériques) créé par le dipôle magnétique A au point M du circuit (C) en fonction de m, θ et $r = AM$:



$$B_r = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{m\cos\theta}{r^3} \quad \text{et} \quad B_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{m\sin\theta}{r^3}.$$

Copyrighted material

Exprimer sur la base $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ la force $\overrightarrow{d^2F'}$ exercée par le champ de l'aimant sur un élément $\overrightarrow{dl} = dl\,\vec{u}_\varphi$ du circuit (C) et la représenter sur un dessin, puis la projeter sur Oz et en donner la résultante dF'_z pour le circuit (C) entier en fonction de m, di, a, r et θ.

b) En exprimant $\sin\theta$, $\cos\theta$ et r en fonction de z et z_a, montrer que la composante axiale de la force exercée par le tuyau entier sur l'aimant F_z, est finalement donnée par l'intégrale :

$$F_z = \frac{-9\mu_0^2\sigma e m^2 a^3 v}{8\pi}\int_0^L \frac{(z-z_a)^2}{(a^2+(z-z_a)^2)^5}\,dz.$$

c) Effectuer dans l'intégrale précédente le changement de variable $x = \dfrac{z-z_a}{a}$ et justifier physiquement l'utilisation de l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^5}\,dx = \frac{5\pi}{128}$$ sachant entre autres que $a \ll L$.

d) En déduire que la force de freinage du tuyau sur l'aimant est du type $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ où α est un coefficient positif indépendant de la position z_a de l'aimant. Donner l'expression de α.

Commenter le signe négatif ainsi que la forme générale de la force.

e) *Application numérique.* L'expérience est facilement réalisable en prenant :

– pour le tuyau de cuivre : $a = 3{,}5$ mm ; $e = 1$ mm ; $L = 1$ m ; $\sigma = 5{,}8\cdot10^7\ \Omega^{-1}\cdot m^{-1}$.

– pour l'aimant en Néodyme-Fer-Bore de masse m' (en forme de petit disque de 5 mm de diamètre et 2 mm de haut), le constructeur fournit les valeurs suivantes : masse $M = 0{,}29$ g, moment magnétique $m = 3{,}7\cdot10^{-2}\ A\cdot m^2$.

– par ailleurs, $\mu_0 = 4\pi\cdot10^{-7}\ H\cdot m^{-1}$.

Donner la valeur numérique de α.

3) Mouvement de chute de l'aimant dans le tuyau métallique

a) Intégrer l'équation différentielle du mouvement de l'aimant et exprimer sa vitesse $v(t)$ et sa cote $z_a(t)$ à l'aide de la vitesse limite atteinte v_l et d'un temps τ caractéristique du régime transitoire. Donner l'expression de v_l en fonction de α et la relation entre v_l et τ.

b) Calculer numériquement v_l, τ et $z_a(\tau)$ dans les unités convenables en reprenant les données de la question **2) e)** ou, à défaut, en prenant $\alpha = 3{,}7\cdot10^{-2}\ kg\cdot s^{-1}$. Commenter.

c) En déduire simplement le temps de chute total t_C de l'aimant dans le tuyau et le comparer à celui $t'_C = 0{,}45$ s de sa chute dans un tube de verre de mêmes caractéristiques géométriques (chute libre). Commenter.

L'expérience donne pour le tuyau de cuivre un temps de chute de l'ordre de 10 s. Le modèle développé dans ce problème paraît-il satisfaisant ?

d) Les frottements de l'air ont été négligés dans cette étude. Est-ce raisonnable ?

Tiré du CONCOURS ESIM 2001 Filière MP.

Copyrighted material

Solution du problème 2

1) a) • L'aimant est en mouvement par rapport au tuyau. De ce fait, le champ magnétique $\vec{B}$ qu'il engendre est un champ magnétique variable du point de vue du tuyau. Le tuyau peut être considéré comme un conducteur placé dans un champ magnétique variable, il est donc soumis au phénomène d'induction.

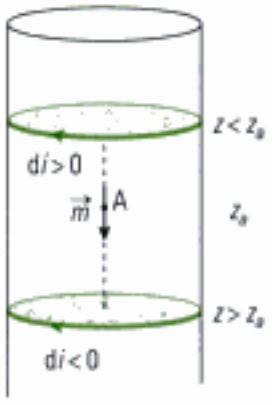
On peut décomposer le tuyau comme un ensemble de cerceau qui forment des circuits fermés. Dans chaque cerceau l'induction engendre un courant induit. On explique alors l'existence de di.

• D'après la loi de Lenz, di doit créer un champ magnétique qui s'oppose à la variation du champ créé par l'aimant.

L'aimant se dirige vers le bas :

➢ si $z > z_a$, le champ magnétique dirigé suivant $\vec{u}_z$, sur l'axe, croît au cours du temps. Le courant di doit donc engendrer un champ magnétique dirigé suivant $-\vec{u}_z$. Il est alors orienté dans le sens négatif sur la figure de l'énoncé.

➢ si $z < z_a$, le champ magnétique dirigé suivant $\vec{u}_z$, sur l'axe, décroît au cours du temps. Le courant di doit donc engendrer un champ magnétique dirigé suivant $\vec{u}_z$. Il est alors orienté dans le sens positif de la figure de l'énoncé.

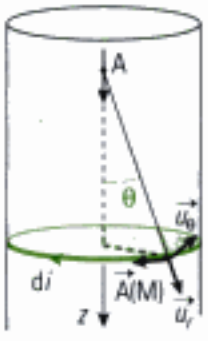


Le tuyau est parcouru par un courant et placé dans un champ magnétique. Il subit donc des forces de Laplace. D'après la troisième loi de Newton, la force exercée par le tuyau sur l'aimant est l'opposé de la force exercée par l'aimant sur le tuyau qui est la force de Laplace. D'après la loi de Lenz, la force exercée par le tuyau sur l'aimant doit s'opposer à sa cause qui est le mouvement de l'aimant. **C'est donc une force de freinage.**

b) On a $\vec{m} = m(\cos\theta\,\vec{u}_r - \sin\theta\,\vec{u}_\theta)$, $r = \|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{a^2 + (z - z_a)^2}$ et $\sin\theta = \dfrac{a}{r}$.

Donc $\vec{A}(M) = \dfrac{\mu_0 m \sin\theta}{4\pi r^2}\,\vec{u}_\varphi$.

Ceci donne : $\boldsymbol{\vec{A}(M) = \dfrac{\mu_0 ma}{4\pi\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^3}}\,\vec{u}_\varphi}$.



c) La position du point A dépend du temps et donc z_a. Le potentiel vecteur $\vec{A}$ dépend donc du temps.

Par définition, $\vec{E}_m(M) = -\dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\dfrac{\mu_0 ma}{4\pi}\,\dfrac{3}{2}\,\dfrac{2(z - z_a)\,\dfrac{dz_a}{dt}}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^5}}\,\vec{u}_\varphi$.

On retrouve donc : $\boldsymbol{\vec{E}_m(M) = \dfrac{-3\mu_0}{4\pi}\,\dfrac{ma(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^5}}\,\vec{u}_\varphi}$.

d) • La densité de courant induit est donnée par la loi d'Ohm : $\vec{j} = \sigma\vec{E}_m$.

De plus, $di = \iint_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$ où S est la surface d'une section verticale du tuyau. Cette surface est un rectangle de largeur e et de hauteur dz.

On obtient : $\boldsymbol{di = \dfrac{-3\mu_0\sigma}{4\pi}\,\dfrac{ma(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^5}}\,e\,dz}$.

Copyrighted material

• La force électromotrice induite dans le circuit (C) est $e' = \oint_{(C)} \vec{E}_m \cdot d\vec{l}$ où $d\vec{l} = a d\varphi \vec{u}_\varphi$ et φ est l'angle des coordonnées sphériques.

On obtient $e' = \dfrac{-3\mu_0}{4\pi} \dfrac{ma(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^5}} 2\pi a$.

Le circuit (C) est en court-circuit donc $dR di - e' = 0$.

Ceci donne : $di = \dfrac{-3\mu_0}{4\pi} \dfrac{ma(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^5}} \dfrac{2\pi a}{dR}$ dans le sens indiqué sur la figure.

Avec $dR = \dfrac{2\pi a}{\sigma e dz}$, on retrouve :

$$\mathbf{d}i = \frac{-3\mu_0\sigma}{4\pi} \frac{ma(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^5}} e\, dz.$$

di est bien orienté dans le sens trouvé à la question 1) a), c'est-à-dire $di > 0$ si $z < z_a$ et $di < 0$ si $z > z_a$.

Le terme de résistance $dR = \dfrac{2\pi a}{\sigma e dz}$ provient directement de l'expression générale de la résistance trouvée au chapitre 3 §B : $dR = \int_{(C)} \dfrac{dl}{\sigma S}$. Ici, la section du conducteur est $S = e dz$, il vient alors :

$$dR = \int_{(C)} \frac{dl}{\sigma e dz} = \frac{2\pi a}{\sigma e dz}.$$

Si $dz \to 0$, $dR \to +\infty$. Ceci est logique car, si l'épaisseur du circuit (C) est nulle, celui-ci peut être considérer en court-circuit et on a bien alors : $dR = +\infty$.

2) a) La force exercée par l'aimant sur un élément $d\vec{l}$ est la force de Laplace :

$\overrightarrow{d^2F'} = di\, d\vec{l} \wedge \vec{B} = di\, dl\, \vec{u}_\varphi \wedge (B_r \vec{u}_r + B_\theta \vec{u}_\theta)$.



On obtient : $$\mathbf{\overrightarrow{d^2F'} = -\, di\, dl \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin\theta}{r^3} \vec{u}_r + di\, dl \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m \cos\theta}{r^3} \vec{u}_\theta}.$$

La projection sur Oz donne :

$d^2F'_z = \overrightarrow{d^2F'} \cdot \vec{u}_r = -\, di\, dl \dfrac{\mu_0}{4\pi} \dfrac{m \cos\theta \sin\theta}{r^3} - di\, dl \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{m \cos\theta \sin\theta}{r^3}$

$$\mathbf{d^2F'_z = -\, di\, dl \frac{3\mu_0}{4\pi} \frac{m \cos\theta \sin\theta}{r^3}}.$$

Donc, sur le circuit (C), $$\mathbf{dF'_z = \int_0^{2\pi a} d^2F'_z = -\, di \frac{3\mu_0}{2} a \frac{m \cos\theta \sin\theta}{r^3}}.$$

b) On intègre sur la hauteur du tuyau :

$F'_z = \int_0^L dF'_z = \int_0^L \dfrac{9\mu_0^2\sigma}{8\pi} \dfrac{ma^2(z - z_a)v}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^5}} \dfrac{m \cos\theta \sin\theta}{\sqrt{(a^2 + (z - z_a)^2)^3}} e\, dz$.

Avec $\cos\theta = \dfrac{(z - z_a)}{r}$ et $\sin\theta = \dfrac{a}{r}$, on a :

$$F_z = -F'_z = -\frac{9\mu_0^2\sigma e m^2 a^3 v}{8\pi} \int_0^L \frac{(z - z_a)^2}{(a^2 + (z - z_a)^2)^5} dz.$$

c) Si on pose $x = \dfrac{(z - z_a)}{a}$, on obtient :

$$\int_0^L \frac{(z - z_a)^2}{(a^2 + (z - z_a)^2)^5} dz = \frac{1}{a^7} \int_{\frac{-z_a}{a}}^{\frac{L - z_a}{a}} \frac{x^2}{(1 + x^2)^5} dx.$$

Or $a \ll L$ et on peut supposer que $a \ll z_a$. On peut donc considérer que l'on a :

$$\int_{\frac{-z_a}{a}}^{\frac{L - z_a}{a}} \frac{x^2}{(1 + x^2)^5} dx \approx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(1 + x^2)^5} dx = \frac{5\pi}{128}.$$

Copyrighted material

d) On trouve alors : $\mathbf{F_z = \frac{-45\mu_0^2 \sigma e m^2 v}{1024 a^4} = -\alpha v}$, avec $\mathbf{\alpha = \frac{45\mu_0^2 \sigma e m^2}{1024 a^4}}$.

La composante suivant Oz de la force exercée par le tuyau sur l'aimant est proportionnelle à la vitesse de l'aimant et s'oppose à la chute de l'aimant comme une force de frottement fluide.

e) *Application numérique* : $\mathbf{\alpha = 3{,}7 \cdot 10^{-2}\ kg \cdot s^{-1}}$.

On trouve l'unité de α en se souvenant qu'une force s'exprime en $kg \cdot m \cdot s^{-2}$ ($F = ma$) ou en regardant plus loin l'énoncé.

3) a) L'aimant est soumis à la force exercée par le tuyau et à son poids.

L'application de la deuxième loi de Newton projetée sur l'axe Oz donne :

$$M \frac{dv}{dt} = Mg - \alpha v.$$

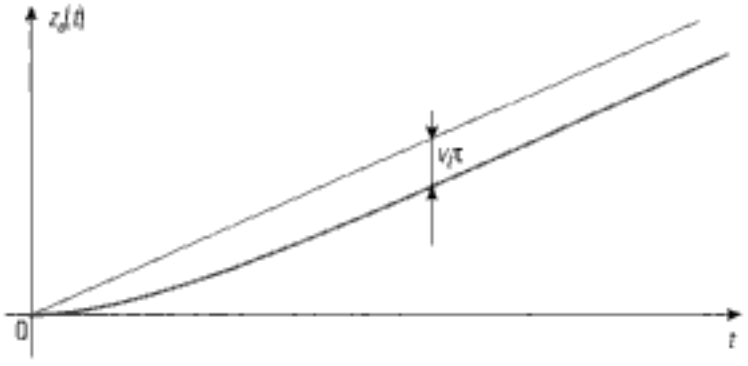
v est donc solution de l'équation différentielle du type $\tau \frac{dv}{dt} + v = \frac{Mg}{\alpha}$ où $\tau = \frac{M}{\alpha}$.

La solution est du type $\mathbf{v(t) = v_l\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)}$ où $\mathbf{v_l = \frac{Mg}{\alpha}}$ et $\mathbf{v_l = \tau g}$.

On en déduit : $z_a(t) = v_l t + v_l \tau e^{-\frac{t}{\tau}} + K$, où K est une constante.

Avec $z_a(0) = 0$, on obtient : $K = -v_l\tau$, d'où :

$$\mathbf{z_a(t) = v_l t + v_l \tau\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right).}$$



b) *Application numérique* : $v_l = 7{,}7\ cm \cdot s^{-1}$, $\tau = 7{,}8$ ms et $z_a(\tau) = 0{,}22$ mm.

L'aimant arrive rapidement à sa vitesse limite.

c) Si l'aimant se déplace à sa vitesse limite, le temps de chute est $t_C = \frac{L}{v_l} = 13{,}0$ s.

On remarque que la différence avec le temps de chute dans un tuyau de verre (sans induction) est très importante. En comparant avec l'expérience menée avec le tuyau de cuivre, le modèle semble satisfaisant.

d) Les frottements visqueux de l'air semblent négligeables devant les forces de freinage dues à l'induction.

Copyrighted material

Problème 3 : *moteur linéaire*

⚠ Les questions **3) a)** et **3) b)** de ce problème requierent des notions sur les ondes électromagnétiques planes progressives harmoniques.

Réalisation d'un champ magnétique à géométrie sinusoïdale

Les bobines représentées figure n° 1 sont en série et alimentées par le même courant I_0. Les enroulements sont tels que deux bobines consécutives soient parcourues par des courants circulant en sens inverse. La présence du fer, représenté par les zones grises, canalise les lignes d'induction de sorte que le champ magnétique $B(x)$ a l'allure d'un créneau alternatif d'amplitude B_0 et de période spatiale λ.

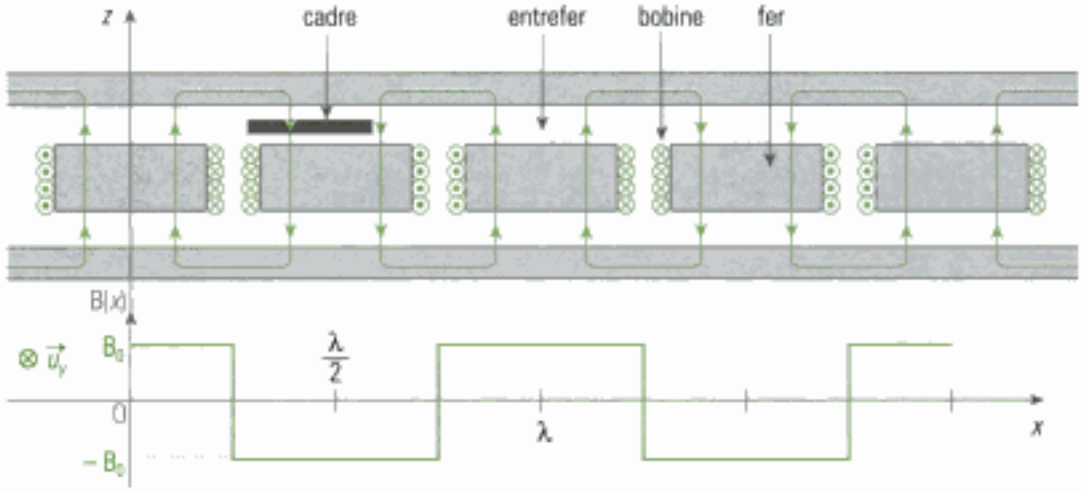


Fig. 1. L'origine O est choisie au centre d'une bobine.

Le développement en série de Fourier du créneau alternatif peut s'écrire :

$$B(x) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) + a_3 \cos\left(3 \times \frac{2\pi}{\lambda} x\right) + \ldots + a_{2p+1} \cos\left((2p+1) \times \frac{2\pi}{\lambda} x\right) + \ldots,$$

le terme fondamental a_1 a pour expression $a_1 = \frac{4B_0}{\pi}$.

Par la suite, on ne prendra en compte que le seul terme fondamental, le champ magnétique $B(x)$ se réduira donc à l'expression : $B(x) = a_1 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$.

1) Entraînement d'un cadre conducteur dans un champ à géométrie sinusoïdale

a) Un cadre conducteur fermé sur lui-même est formé de N spires rectangulaires de dimensions a et b (b suivant l'axe Ox et a suivant l'axe Oy). Il est placé dans l'entrefer, les lignes de champ étant normales au plan du cadre, et entraîné à la vitesse v suivant Ox (à l'instant t, le centre du cadre est à l'abscisse $x = vt$).

Dans l'hypothèse où $b \ll \lambda$, ce qui revient à considérer le champ magnétique localement uniforme sur la surface du cadre, calculer le flux Φ du champ magnétique à travers le cadre.

b) Donner l'expression exacte du flux Φ et montrer que l'on retrouve une expression approchée dans le cas où $b \ll \lambda$. Par la suite, on conservera l'expression approchée.

c) Le cadre a pour résistance R et pour inductance L. On posera $\Omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$ et $\Phi_M = NabB_M$ avec $B_M = a_1$. Exprimer l'intensité du courant $i(t)$ dans le cadre en régime établi.

d) On se place encore dans le cas $b \ll \lambda$. Montrer que la force électromagnétique moyenne qui s'exerce sur le cadre a pour expression :

$$\langle F \rangle = -2\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 \Phi_M^2 R \frac{v}{R^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} Lv\right)^2}.$$

On pourra s'aider de la formule :

$$\cos[\arctan(\theta)] = \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}.$$

Préciser son sens, en déduire la puissance développée par l'opérateur qui entraîne le cadre.

e) Calculer la puissance moyenne perdue par effet Joule dans le cadre. Conclure.

Copyrighted material

2) Réalisation d'un champ magnétique glissant à géométrie sinusoïdale

On suppose à présent que l'intensité du courant qui alimente les bobines de la figure n° 1 est de la forme $I_0\cos(\omega t)$.

a) Justifier simplement le fait que B_0 devient $B_0\cos(\omega t)$ (la fréquence f associée à ω est supposée basse).

b) Donner l'expression de $B(x, t)$ en prenant en compte le seul terme fondamental et montrer que $B(x, t)$ peut être considéré comme la superposition de deux ondes progressives circulant en sens inverse appelées « champs glissants ».

Pour les applications qui vont suivre, l'onde progressive circulant dans le sens négatif de l'axe Ox doit être supprimée, de manière à obtenir un champ glissant unique dans le sens positif de l'axe Ox. Ceci sera obtenu de manière statique (sans déplacement de matière) grâce à des courants déphasés de $\frac{2\pi}{3}$ dans le temps (appelés courants triphasés) alimentant des bobines décalées de $\frac{\lambda}{3}$ dans l'espace (fig. 2).

On admet l'expression : $B(x, t) = \frac{3B_0}{\pi}\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$.

Exprimer la vitesse v_0 du champ glissant.

Application numérique : $f = 50$ Hz, $\lambda = 1$ m, calculer v_0.

3) Le moteur linéaire

a) Dans la partie 2, le cadre se déplaçait à la vitesse v dans le champ magnétique sinusoïdal fixe. A présent, le cadre se déplace à la vitesse v dans le champ glissant dont la vitesse est v_0. En transposant le calcul de la force moyenne s'exerçant sur le cadre effectué à la question **1) d)**, donner l'expression de la force moyenne de propulsion du cadre en fonction de sa vitesse v. Cette expression représente la caractéristique mécanique du moteur linéaire.

b) Étude de la caractéristique mécanique $\langle F\rangle(v)$.

b1) Donner l'expression de $\langle F_0\rangle$ au démarrage.

b2) Donner l'expression v_M de la vitesse pour laquelle la force est maximale.

b3) Pour quelles valeurs de la vitesse le système fonctionne-t-il en moteur ou en générateur ?

b4) Quelle opportunité présente le fonctionnement en générateur lors de la traction d'un véhicule par un moteur linéaire ?

b5) Tracer la courbe $\langle F\rangle(v)$.

Tiré du Concours ESIM 2000 Filière PC

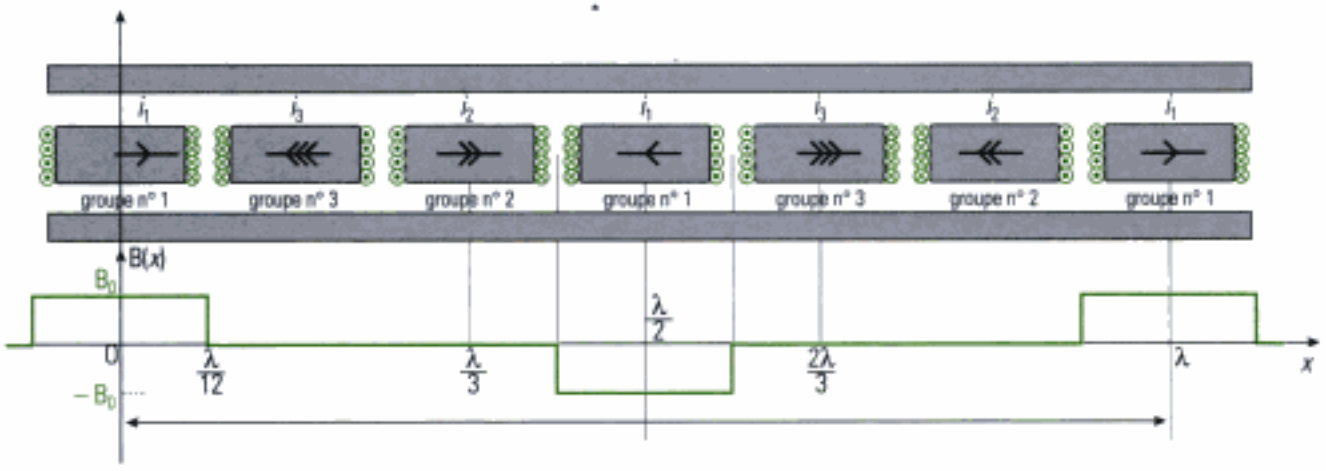
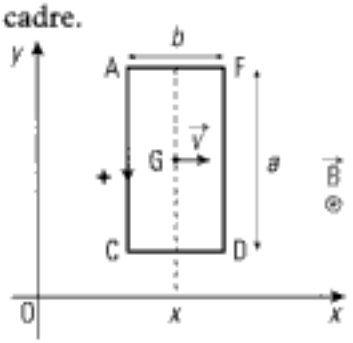


Fig. 2.

Copyrighted material

Hidden page

d) On étudie les forces de Laplace qui s'exercent sur chaque portion du cadre.



• Sur la portion AC, la force de Laplace est :

$$\vec{F}_{L1} = \int_A^C i(t)\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B} = -\int_0^a i(t)a_1\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x - \frac{b}{2}\right)\right)\mathrm{d}y\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z.$$

D'où $\vec{F}_{L1} = -\dfrac{\Phi_M \Omega a_1 a}{\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}} \sin\left(\Omega t - \arctan\left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)\right) \cos\left(\Omega t - \dfrac{\pi b}{\lambda}\right)\vec{u}_x.$

• Sur la portion FD, la force de Laplace est :

$$\vec{F}_{L2} = \int_D^F i(t)\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_0^a i(t)a_1\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\left(x + \frac{b}{2}\right)\right)\mathrm{d}y\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z.$$

D'où $\vec{F}_{L2} = \dfrac{\Phi_M \Omega a_1 a}{\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}} \sin\left(\Omega t - \arctan\left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)\right) \cos\left(\Omega t + \dfrac{\pi b}{\lambda}\right)\vec{u}_x.$

• Sur la portion DC, la force de Laplace est :

$$\vec{F}_{L3} = \int_C^D i(t)\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B} = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} i(t)a_1\cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\mathrm{d}x\ \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z.$$

• Sur la portion AF, la force de Laplace est :

$$\vec{F}_{L4} = \int_F^A i(t)\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B} = -\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} i(t)a_1\cos\left(\Omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\mathrm{d}x\ \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z.$$

On remarque que $\vec{F}_{L3} + \vec{F}_{L4} = \vec{0}$, il est donc inutile d'aller au bout du calcul.

On obtient :

$$\vec{F}_L = \vec{F}_{L1} + \vec{F}_{L2} = \frac{\Phi_M \Omega a_1 a}{\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}} \sin\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)\right)\left[\cos\left(\Omega t + \frac{\pi b}{\lambda}\right) - \cos\left(\Omega t - \frac{\pi b}{\lambda}\right)\right]\vec{u}_x.$$

Avec $\cos p - \cos q = -2\sin\left(\dfrac{p+q}{2}\right)\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)$, et en observant la force de Laplace appliquée sur les N spires du cadre, on obtient :

$$\boxed{\vec{F}_L = -2N \frac{\Phi_M \Omega a_1 a}{\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}} \sin\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)\right) \sin\left(\frac{\pi b}{\lambda}\right) \sin(\Omega t)\ \vec{u}_x.}$$

On se trouve dans le cas où $b \ll \lambda$, donc $\sin\left(\dfrac{\pi b}{\lambda}\right) = \dfrac{\pi}{\lambda} b$.

On en conclut :

$$\vec{F}_L = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{\Phi_M^2 \Omega}{\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}} \sin\left(\Omega t - \arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)\right) \sin(\Omega t)\ \vec{u}_x.$$

On veut déterminer la valeur moyenne. On remplace alors le produit par une somme grâce à l'égalité : $\sin a \sin b = \dfrac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$.

D'où :

$$\langle \vec{F}_L \rangle = -\frac{\pi}{\lambda} \frac{\Phi_M^2 \Omega}{\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}} \left[\cos\left(\arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)\right) - \cos\left(2\Omega t - \arctan\left(\frac{L\Omega}{R}\right)\right)\right]\vec{u}_x.$$

Or $\left\langle \cos\left(2\Omega t - \arctan\left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)\right)\right\rangle = 0$ et $\left\langle \cos\left(\arctan\left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)\right)\right\rangle = \cos\left(\arctan\left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)\right)$.

D'où $\langle \vec{F}_L \rangle = -\dfrac{\pi}{\lambda} \dfrac{\Phi_M^2 \Omega}{\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}} \cos\left(\arctan\left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)\right)\vec{u}_x.$

De plus, $\cos\left(\arctan\left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)\right) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{L\Omega}{R}\right)^2}}$ et $\Omega = \dfrac{2\pi}{\lambda} v$.

Copyright material

On en déduit : $$\langle \vec{F}_L \rangle = -2\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 R\Phi_M^2 \frac{v}{R^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} Lv\right)^2} \vec{u}_x.$$

Cette force s'oppose au mouvement, ce qui est logique du fait de la loi de Lenz.

La puissance développée par l'opérateur pour maintenir la vitesse constante compense la puissance des forces de Laplace : $\langle P_{op} \rangle = -\langle \vec{F}_L \rangle \cdot \vec{v}$ en considérant la vitesse du cadre constante, soit :

$$\langle P_{op} \rangle = 2\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2 R\Phi_M^2 \frac{v^2}{R^2 + \left(\frac{2\pi}{\lambda} Lv\right)^2}.$$

e) Les pertes par effet Joule sont données par $P_J = Ri_{eff}^2$ où $i_{eff} = \frac{\Phi_M \Omega}{\sqrt{2}\sqrt{R^2 + (L\Omega)^2}}$ puisque le courant induit est supposé sinusoïdal.

On trouve : $$P_J = 2R\left(\frac{\pi}{\lambda} v\right)^2 \frac{\Phi_M^2}{R^2 + (L\Omega)^2}.$$

On obtient $\langle P_J \rangle = \langle P_{op} \rangle$, ce qui signifie que toute l'énergie mécanique fournie au cadre par l'opérateur est dissipée sous forme d'énergie électrique par effet Joule (énergie thermique).

2) a) On se trouve dans l'approximation des régimes quasi-stationnaires. Les équations de Maxwell sont identiques à celles de la statique. On utilise les résultats précédents pour les champs statiques en remplaçant le courant continu par le courant $I_0\cos(\omega t)$.

On aura alors un champ magnétique sinusoïdal que l'on écrit $B_0\cos(\omega t)$.

b) Le champ magnétique est de la forme $B(x, t) = B_M \cos\omega t \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right)$.

Avec $\cos a \cos b = \frac{1}{2}(\cos(a + b) + \cos(a - b))$, on obtient :

$$B(x, t) = \frac{B_M}{2}\left[\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x\right) + \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)\right].$$

On reconnaît $B_1(x, t) = \frac{B_M}{2}\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$, qui est une onde plane progressive qui se propage dans le sens négatif de l'axe des x à la vitesse $\frac{\lambda\omega}{2\pi}$ et $B_2(x, t) = \frac{B_M}{2}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$, qui est une onde plane progressive qui se propage dans le sens positif de l'axe des x à la vitesse $\frac{\lambda\omega}{2\pi}$.

Le champ magnétique associé à l'onde plane progressive $B(x, t) = \frac{3B_0}{\pi}\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$ qui se propage dans le sens positif de l'axe des x admet une vitesse : $v_0 = \frac{\lambda\omega}{2\pi} = \lambda f = 50\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

3) a) On reprend les principaux résultats en essayant de les adapter au problème.

On retrouve alors :

$\Phi = NabB(x) = \frac{3}{\pi} NabB_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) = \frac{3}{\pi} NabB_0 \cos\left(\left(\omega - \frac{2\pi}{\lambda} v\right)t\right)$.

Posons $\Phi'_M = Nab\frac{3B_0}{\pi}$ et $\Omega' = \omega - \frac{2\pi}{\lambda} v$.

On a toujours l'équation électrique suivante : $Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} = -\frac{d\Phi}{dt} = \Phi'_M \Omega' \sin(\Omega' t)$.

D'où : $$i(t) = \frac{\Phi'_M \Omega'}{\sqrt{R^2 + (L\Omega')^2}} \sin\left(\Omega' t - \arctan\left(\frac{L\Omega'}{R}\right)\right).$$

On en déduit :

$$\langle \vec{F}_L \rangle = -\frac{\pi}{\lambda} \frac{R\Phi'^2_M \Omega'}{R^2 + (L\Omega')^2} \vec{u}_x.$$

Copyrighted material

Hidden page

Index

A

Ampère (théorème d'Ampère généralisé), 46
ARQS, 54
Auto-induction, 112

B

Biot et Savart (loi de), 49

C

Changement de référentiel (formules de), 148
Charges
- **densité volumique,** 34
- **densité surfacique,** 35
- **densité de charges liées,** 40
- **équation de conservation de la charge,** 37

Circulation conservative (champ à), 13
Conducteur parfait, 60
Coordonnées (système de), 8
Coulomb (loi de), 49
Courant
- **densité de courant volumique,** 36
- **densité de courant surfacique,** 36
- **densité de courants liés,** 39
- **densité de courant volumique de déplacement,** 42

D

Déplacement électrique (vecteur), 42
Diélectrique (milieu), 38
Divergence (opérateur), 13

E

Électromoteur (champ électromoteur d'induction), 108, 149
Énergie électromagnétique (densité volumique de), 61

F

Faraday (loi de), 45, 110
Flux, 10
Flux conservatif (champ à), 15
Force électromotrice d'induction, 110, 149
Foucault (courants de), 149

G

Gauss (théorème de), 45
Gradient (opérateur), 11

H

Haut-parleur, 150

I

Inductance mutuelle, 115
Inductance propre, 112

L

Laplace (équation de), 48
Laplacien (opérateur), 18
Lenz (loi de), 110
Lorentz (puissance volumique des forces de), 60

M

Maxwell (équations de), 41

N

Nabla (opérateur), 19
Neumann
- **champ électromoteur de,** 108
- **théorème de,** 115

Copyrighted material

O

Ohm (loi d'Ohm locale), 56
Ostrogradsky (formule de), 14

P

Peau
- **– (effet de),** 56
- **– (épaisseur de),** 59

Permittivité (relative et absolue), 43
Poisson (équations de), 48
Polarisation, 38
Potentiel scalaire, 20, 47
Potentiel vecteur, 21, 46
Poynting (vecteur, équation locale de), 61

R

Relations de passage du champ électromagnétique, 50
Rotationnel (opérateur), 15

S

Stokes (formule de), 12
Susceptibilité diélectrique, 43

T

Transformateur
- **– idéal de courant,** 119
- **– idéal de tension,** 118
- **– parfait,** 117

Hidden page

Bréal, l'éditeur des prépas

En français

L'épreuve littéraire



En un seul volume, une préparation complète et efficace à l'épreuve littéraire des concours des Grandes Écoles scientifiques, sur le thème au programme : résumé et analyse des œuvres au programme, étude synthétique du thème, méthodologie des épreuves, traitement d'images et d'autres textes en lien avec le thème.



20 dissertations analysées et corrigées

Vingt dissertations autour du thème au programme, complétées par une méthodologie générale illustrée. Chaque sujet comprend une analyse de l'énoncé, un plan détaillé, ainsi qu'un corrigé rédigé et de nombreux commentaires.



Connaissance d'une œuvre

Les repères essentiels sur l'œuvre et son auteur, une analyse détaillée du texte et des principaux thèmes, des compléments utiles et des prolongements vers d'autres œuvres.

La philothèque



Cette collection permet de comprendre les enjeux philosophiques de l'œuvre étudiée et les concepts qu'elle véhicule. Chaque ouvrage comprend des éléments de lecture et d'analyse de l'œuvre dans son ensemble, le texte intégral d'une partie de l'œuvre et différents outils (vocabulaire, notions, etc.).

En langues

Journal'ease Vocabulaire, Journal'ease Exercices



Les 1300 mots nécessaires pour lire et comprendre la presse anglo-saxonne, ainsi que des exercices variés pour s'entraîner à utiliser le bon mot au bon moment, à l'oral comme à l'écrit. Des outils de travail efficaces pour préparer les concours et les examens.

Existe aussi en allemand ***(Journ'allemand Vocabulaire et exercices)*****, en espagnol** ***(Journal'isimo Vocabulaire et exercices)*** **et en italien** ***(Journal'italien).***



Fort en thème - Fort en version

Des exercices de thème et de version, de difficulté progressive, pour s'entraîner à ces deux techniques de la traduction.

Titres disponibles en anglais, allemand et espagnol.

Retrouvez toutes les informations nécessaires sur ces titres et d'autres ouvrages pour les prépas sur notre site : www.editions-breal.fr

Copyrighted material

Hidden page

Copyrighted material



Titres disponibles en deuxième année dans les filières PC et PSI...

En Mathématiques
- Analyse PC
- Analyse PSI
- Algèbre et géométrie PC
- Algèbre et géométrie PSI

En Chimie
- Chimie organique PC
- Thermodynamique-Matériaux PC
- Chimie PSI

Livres d'exercices
- Mathématiques PC-PSI
- Physique PC / Physique PSI

En Physique
- Optique MP-PC-PSI-PT
- Mécanique MP-PC
- Électromagnétisme PC-PSI
- Physique des ondes PC-PSI
- Thermodynamique PC-PSI
- Mécanique des fluides PC-PSI
- Électrotechnique PSI
- Électronique PSI

LES NOUVEAUX

Précis

BRÉAL

Une collection tenant compte de vos besoins et de vos contraintes, conçue pour vous aider tout au long de l'année à préparer efficacement les concours.

- **Un cours complet et très clair**, illustré de nombreux exemples, pour comprendre et assimiler.
- **Des pages de méthode**, facilement mémorisables, pour acquérir les savoir-faire et les réflexes nécessaires.
- **De nombreux exercices corrigés**, variés et progressifs, pour s'entraîner régulièrement.

Les Nouveaux Précis Bréal sont **la collection de référence** pour réussir sa prépa et intégrer une grande école d'ingénieurs.

BRÉAL, L'ÉDITEUR DES PRÉPAS

Réf. : 209.0358
ISBN : 2 7495 0396 5
www.editions-breal.fr

Copyrighted material